



PROJETO DE GRADUAÇÃO

IMPLEMENTAÇÃO IMPLÍCITA DO MODELO DE PLASTICIDADE CÍCLICA DE CHABOCHE

Por

Jhonatan da Ponte Lopes

Brasília, 29 de Dezembro de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**IMPLEMENTAÇÃO IMPLÍCITA DO MODELO DE
PLASTICIDADE CÍCLICA DE CHABOCHE**

Por

Jhonatan da Ponte Lopes

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Lucival Malcher (Orientador)

Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ ENM

Prof. Dr. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM

Brasília, 29 de Dezembro de 2014

Dedicatória(s)

*Ao meu Deus, meu pai e salvador, e à
mulher da minha vida, Mariana, minha
esposa.*

Jhonatan da Ponte Lopes

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, por me dar a vida todos os dias, por ter me amado desde o princípio, por ter feito de tudo para não ficar longe de mim, a Jesus, que morreu por mim, e ao Espírito Santo, que me ensina e me capacita em todos os momentos da minha vida.

Agradeço à minha esposa, Mariana, a mulher da minha vida, por continuar derramando seu amor por mim todos os dias e sempre me apoiar e me fortalecer. Muito obrigado por sempre acreditar em mim.

Aos meus pais, Elias e Marlene, agradeço por terem me criado e me ajudado em todos os momentos e por terem investido em meus estudos, mesmo em momentos difíceis. Ao meu irmão, Johnny, agradeço por fazer parte da minha vida.

Agradeço, também, ao Prof. Dr. Lucival Malcher, por ter me orientado e ajudado de forma essencial durante a elaboração deste trabalho.

Jhonatan da Ponte Lopes

RESUMO

Neste trabalho, busca-se implementar implicitamente o modelo de Chaboche utilizando a função de escoamento de von Mises. Primeiramente é desenvolvido o modelo matemático de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche, em que são formuladas as relações constitutivas necessárias à elaboração do modelo. Em seguida, são desenvolvidos os modelos numéricos para a solução das equações constitutivas, utilizando a lei de Chaboche com três termos e discretização de Euler. Após, são apresentados os resultados referentes à implementação, utilizando modelo de Chaboche com dois termos não lineares e três termos lineares e o modelo de Armstrong-Frederick (Chaboche com um termo não linear). São utilizados os aços 304 e S460N, sendo submetidos a históricos de carregamento uniaxial de tração-compressão, uniaxial de cisalhamento, multiaxial proporcional e multiaxial não proporcional, além do aço SAE 1045 HR, submetido a carregamento não proporcional. Os resultados são comparados entre si e com dados experimentais disponíveis na literatura e dados referentes à implementação do modelo de Chaboche explicitamente. Os resultados obtidos mostram que o modelo de Chaboche descreve bem carregamentos proporcionais, mas tem pouca sensibilidade a carregamentos não proporcionais.

Palavras-chave: Plasticidade cíclica, endurecimento cinemático, estratégia implícita.

ABSTRACT

This project seeks the implicit implementation of the Chaboche's model, utilizing the yield function of von Mises. Initially, the von Mises' and Chaboche's kinematic hardening model is developed, by formulating the necessary constitutive relations. Then, the numerical model necessary to the solution of the constitutive relations is developed, utilizing the Chaboche's law with 3 terms and Euler's discretization. After, the implementation results are presented, referring to Chaboche's law with two non-linear terms and three linear terms and Armstrong-Frederick's law (Chaboche with one non-linear term). Steels 304 and S460N were utilized, being subjected to uniaxial traction-compression, uniaxial shear, multiaxial proportional and multiaxial non-proportional loading trajectories. Steel SAE 1045 HR was utilized under non proportional loading. The results are compared among themselves and with experimental data and data from an explicit Chaboche's implementation. The results show that Chaboche's model succeeds in describing proportional loading, but has low sensitivity to non-proportional loading.

Keywords: Cyclic plasticity, kinematic hardening, implicit strategy.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1 | CONTEXTO..... | 1 |
| 1.2 | OBJETIVO..... | 2 |
| 1.3 | ESCOPO DO TRABALHO | 2 |
| 2 | ASPECTOS TEÓRICOS..... | 3 |
| 2.1 | MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA | 3 |
| 2.1.1 | PLASTICIDADE CÍCLICA..... | 4 |
| 2.1.2 | PRAGER..... | 6 |
| 2.1.3 | ARMSTRONG-FREDERICK..... | 7 |
| 2.1.4 | CHABOCHE..... | 8 |
| 2.2 | MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO | 9 |
| 3 | ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA..... | 12 |
| 3.1 | INTRODUÇÃO | 12 |
| 3.2 | MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO | 14 |
| 3.3 | OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE | 21 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO | 23 |
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 23 |
| 4.2 | IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS..... | 24 |
| 4.3 | MODELO DE ARMSTRONG-FREDERICK..... | 25 |
| 4.4 | MODELO DE CHABOCHE | 35 |
| 4.5 | CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS..... | 45 |
| 4.6 | MODELO DE CHABOCHE VS MODELO DE A-F | 50 |
| 4.7 | CONCLUSÕES..... | 55 |
| 5 | TRABALHOS FUTUROS..... | 56 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 57 |
| | ANEXO I..... | 58 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 – Ensaio de tração uniaxial (Souza Neto et al., 2008). | 3 |
| Figura 2.2 – Comparação entre os diferentes tipos de endurecimento. (a) Endurecimento ideal; (b) Endurecimento isotrópico; (c) Endurecimento cinemático. | 5 |
| Figura 2.3 – Efeito do endurecimento cinemático na superfície de escoamento. | 6 |
| Figura 2.4 – Comparação entre o modelo de Prager e a tendência experimental em carregamento uniaxial. | 7 |
| Figura 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas. | 13 |
| Figura 4.1 – Históricos de carregamentos considerados nas simulações. | 24 |
| Figura 4.2 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$ | 27 |
| Figura 4.3 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 27 |
| Figura 4.4 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 28 |
| Figura 4.5 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 28 |
| Figura 4.6 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 29 |
| Figura 4.7 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 29 |
| Figura 4.8 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 30 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.9 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 30 |
| Figura 4.10 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0\%$ | 31 |
| Figura 4.11 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 31 |
| Figura 4.12 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$. . | 32 |
| Figura 4.13 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 32 |
| Figura 4.14 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 33 |
| Figura 4.15– Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$. . | 33 |
| Figura 4.16 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 34 |
| Figura 4.17 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$. . | 34 |
| Figura 4.18 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0\%$ | 35 |
| Figura 4.19 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 37 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.20 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 38 |
| Figura 4.21 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 38 |
| Figura 4.22 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 39 |
| Figura 4.23 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 39 |
| Figura 4.24 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 40 |
| Figura 4.25 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 40 |
| Figura 4.26 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0\%$ | 41 |
| Figura 4.27 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 41 |
| Figura 4.28 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 42 |
| Figura 4.29 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 42 |
| Figura 4.30 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 43 |
| Figura 4.31 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Chaboche | |

| | |
|---|----|
| implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 43 |
| Figura 4.32 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 44 |
| Figura 4.33 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173\%$ e $\gamma_a = 0,3\%$ | 44 |
| Figura 4.34 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 46 |
| Figura 4.35 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 46 |
| Figura 4.36 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$ | 47 |
| Figura 4.37 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404\%$ e $\gamma_a = 0,7\%$ | 47 |
| Figura 4.38 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404\%$ e $\gamma_a = 0,7\%$ | 48 |
| Figura 4.39 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404\%$ e $\gamma_a = 0,7\%$ | 48 |
| Figura 4.40 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (FATEMI, 1998) para o aço SAE 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$ | 49 |
| Figura 4.41 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$ | 49 |
| Figura 4.42 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13\%$ e $\gamma_a = 0,34\%$ | 50 |
| Figura 4.43 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos implícitos de | |

| | |
|--|----|
| Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$ | 51 |
| Figura 4.44 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 51 |
| Figura 4.45 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 52 |
| Figura 4.46 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$ | 52 |
| Figura 4.47 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$ | 53 |
| Figura 4.48 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$ | 53 |
| Figura 4.49 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$ | 54 |
| Figura 4.50 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória D) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$ | 54 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 2.1 – Modelo elastoplástico com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche. | 11 |
| Tabela 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. | 17 |
| Tabela 3.2 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. | 18 |
| Tabela 4.1 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Armstrong-Frederick (Pereira, 2014) e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304 e S460N. | 25 |
| Tabela 4.2 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche (Pereira, 2014) e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304 e S460N. | 25 |
| Tabela 4.3 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, explícita e implícita segundo o modelo de Armstrong-Frederick para os casos A, B, C e D e aços 304 e S460N. | 26 |
| Tabela 4.4 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, implícita segundo o modelo de Chaboche e explícita para os casos A, B, C e D e aços 304 e S460N. | 36 |
| Tabela 4.5 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, implícita segundo o modelo de Chaboche e explícita para os aços 304, S460N e 1045 HR. | 45 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------------------|---|
| $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | Tensões principais |
| ϕ | Função de escoamento |
| \mathbf{S} | Tensor desviador do tensor tensão |
| β | Tensão de endurecimento cinemático |
| $\dot{\beta}$ | Taxa de evolução da tensão de endurecimento cinemático |
| J_2 | Segundo invariante do tensor |
| η | Tensor relativo |
| H^k | Módulo de endurecimento cinemático |
| σ_y | Limite de escoamento |
| ϵ | Tensor deformação |
| ϵ^e | Tensor deformação elástica |
| ϵ^p | Tensor deformação plástica |
| $\dot{\epsilon}^p$ | Taxa de evolução da deformação plástica |
| $\dot{\gamma}$ | Multiplicador plástico |
| b | Constante do material de endurecimento cinemático |
| m | Número de termos de Chaboche |
| H_i^k | Módulo de endurecimento cinemático i de Chaboche |
| b_i | Constante do material i de Chaboche |
| $\dot{\beta}_i$ | Termo i de tensão de endurecimento cinemático de Chaboche |
| σ_{y0} | Limite de escoamento inicial |
| \bar{q} | Tensão equivalente de von Mises |
| \mathbf{N} | Vetor de Fluxo |
| $\bar{\epsilon}^p$ | Deformação plástica equivalente |
| $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ | Taxa de variação da deformação plástica equivalente |
| σ | Tensor tensão |
| \mathbb{D}^e | Tensor constitutivo |
| $\tilde{\sigma}$ | Tensor tensão efetivo |
| p | Tensão hidrostática |
| G | Módulo de cisalhamento |
| E | Módulo de Young |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| $[t_n, t_{n+1}]$ | Pseudo-intervalo de tempo |
| σ_{n+1} | Tensor tensão no estado $n + 1$ |

| | |
|-----------------------------------|--|
| α_{n+1} | Variáveis internas no estado $n + 1$ |
| $\Delta \epsilon$ | Incremento de deformação |
| $(*)^{trial}$ | Estado tentativa |
| $(*)$ | Estado real |
| ϵ_n^e | Tensor deformação elástica no estado n |
| ϵ_{n+1}^e | Tensor deformação elástica no estado $n + 1$ |
| $\epsilon_{n+1}^{e\ trial}$ | Tensor deformação elástica tentativa |
| ϵ_n^p | Tensor deformação plástica no estado n |
| ϵ_{n+1}^p | Tensor deformação plástica no estado $n + 1$ |
| $\epsilon_{n+1}^{p\ trial}$ | Tensor deformação plástica tentativa |
| σ_{n+1} | Tensor tensão no estado $n + 1$ |
| σ_{n+1}^{trial} | Tensor tensão tentativa |
| β_n | Tensão de endurecimento cinemático no estado n |
| β_{n+1} | Tensão de endurecimento cinemático no estado $n + 1$ |
| β_{n+1}^{trial} | Tensão de endurecimento cinemático tentativa |
| $\bar{\epsilon}_n^p$ | Deformação plástica equivalente no estado n |
| $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ | Deformação plástica equivalente no estado $n + 1$ |
| $\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial}$ | Deformação plástica equivalente tentativa |
| η_{n+1}^{trial} | Tensor relativo tentativa |
| S_{n+1} | Tensor desviador da tensão no estado $n + 1$ |
| S_{n+1}^{trial} | Tensor desviador da tensão tentativa |
| $\epsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}$ | Tensor deformação elástica desviador tentativa |
| ϕ^{trial} | Função de escoamento tentativa |
| \bar{q}_{n+1}^{trial} | Tensão equivalente de von Mises tentativa |
| $\Delta \gamma$ | Multiplicador plástico |
| I | Matriz identidade de 2ª ordem |
| p_{n+1} | Pressão hidrostática no estado $n + 1$ |
| p_{n+1}^{trial} | Pressão hidrostática tentativa |
| \mathbb{I} | Matriz identidade de 4ª ordem |
| D_n | Variável de dano no estado n |
| D_{n+1} | Variável de dano no estado $n + 1$ |
| D_{n+1}^{trial} | Variável de dano no estado tentativa |
| N_{n+1} | Vetor de fluxo no estado $n + 1$ |
| H' | Coefficiente de endurecimento cíclico |
| n' | Expoente de endurecimento cíclico |

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

A plasticidade cíclica está diretamente relacionada com a falha por fadiga. Em componentes mecânicos submetidos a cargas variáveis, o fenômeno da fadiga se destaca dentre as falhas mecânicas, sendo caracterizada pela fratura do material, devido ao crescimento de microtrincas durante ciclos alternados de carregamento e descarregamento. Suas consequências podem ser catastróficas, a exemplo da explosão durante o voo dos aviões Comet, em 1954, causada por fratura da fuselagem devido à fadiga nas extremidades das janelas; e o descarrilamento do trem de alta velocidade alemão ICE, em 1998, devido à fadiga em suas rodas, causando a morte de mais de cem pessoas. Por causa de sua complexidade, a fadiga tem sido objeto de estudos da comunidade científica e industrial desde o século XIX, apresentando ainda hoje desafios relacionados à sua quantificação.

Os modelos de fadiga requerem a determinação do histórico de carregamento, incluindo as tensões médias e as amplitudes de tensão nos componentes de engenharia, para que se obtenha um projeto mecânico confiável. Entretanto, para geometrias e carregamentos complexos, a determinação das amplitudes não é trivial, e depende da utilização de modelos complexos. Dessa forma, é necessária a formulação e utilização de modelos matemáticos/numéricos para a determinação das amplitudes.

Portanto, o conhecimento do comportamento elastoplástico dos materiais tem tido cada vez mais importância, principalmente em projetos de produtos e processos. Em processos de estampagem, corte e dobramento, por exemplo, trabalha-se predominantemente no regime plástico. O conhecimento do comportamento elastoplástico permite, então, projetar de maneira a evitar tensões e deformações excessivas que possam danificar o material, provocando o aparecimento de defeitos, como trincas, por exemplo.

Dentre as técnicas utilizadas para determinar tensões e deformações em geometrias complexas, os métodos numéricos se destacam. De fato, é verdade que o ensaio de componentes é uma parte indispensável no projeto, mas os dados obtidos podem ser extrapolados para geometrias não ensaiadas apenas se análises teóricas estiverem disponíveis. Assim, o uso de técnicas computacionais para calcular as tensões e deformações inelásticas se faz essencial em geometrias complexas encontradas na prática.

Para cargas alternadas em regime plástico, destacam-se os modelos de plasticidade cíclica de Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986), os quais descrevem os efeitos presentes quando o material é submetido a cargas alternadas, como o efeito de Bauschinger.

1.2 OBJETIVO

Com base no contexto apresentado, este trabalho tem como objetivo principal implementar o modelo de plasticidade cíclica de Chaboche, tendo como base a formulação de von Mises. Para isso, é sugerido um modelo em 3D para a integração numérica implícita das equações de evolução. Os algoritmos de integração são desenvolvidos em linguagem FORTRAN e implementados em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos. Em seguida, são obtidos resultados para carregamentos uniaxiais de tração-compressão, uniaxiais de cisalhamento, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais, utilizando os aços 304 e S460N. Os resultados são comparados com resultados de estratégia explícita e dados experimentais disponíveis na literatura.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Tendo em vista a implementação do modelo de Chaboche o trabalho foi dividido em cinco capítulos. No capítulo 1, é feita a contextualização do tema e a definição do objetivo do trabalho.

No capítulo 2, são apresentados os aspectos teóricos referentes à estruturação dos modelos. São mostrados os aspectos básicos sobre plasticidade cíclica. Além disso, o modelo matemático de von Mises com endurecimento cinemático segundo a lei de evolução de Chaboche é desenvolvido.

No capítulo 3, são apresentadas as estratégias numéricas para o algoritmo de integração implícita de Chaboche, utilizando von Mises como função de escoamento, ou seja, apresenta-se os aspectos numéricos de solução das equações constitutivas através da discretização de Euler e da utilização do método de Newton-Raphson.

No capítulo 4, são apresentados os resultados da implementação do modelo de Chaboche com função de escoamento de von Mises para os aços 304, S460N e 1045 HR, comparando-os à estratégia explícita e a dados experimentais disponíveis na literatura. No capítulo 5 são apresentados os possíveis trabalhos futuros.

2 ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 MODELOS DE PLASTICIDADE CÍCLICA

A teoria da plasticidade se concentra em sólidos que, após serem submetidos a certo carregamento, são capazes de manter deformações permanentes (ou plásticas) quando descarregados completamente (Souza Neto et al., 2008). Este comportamento pode ser observado em um ensaio de tração uniaxial, utilizando um corpo de prova metálico, ilustrado na Fig. 2.1.

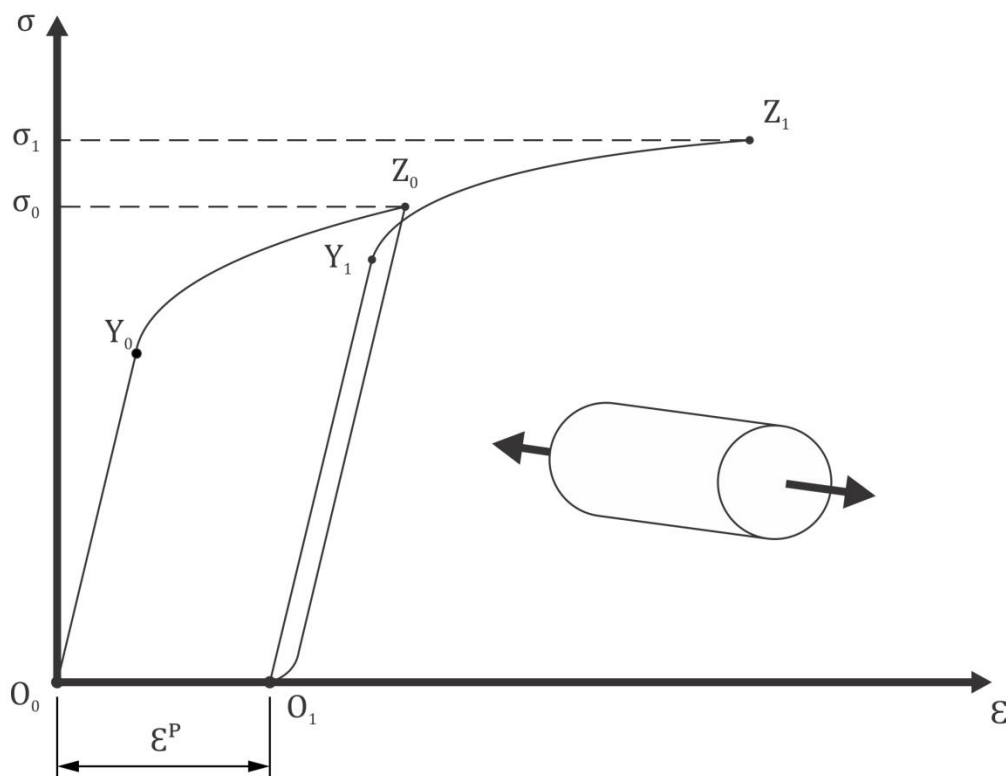


Figura 2.1 – Ensaio de tração uniaxial (Souza Neto et al., 2008).

Inicialmente, o corpo de prova é tracionado até uma tensão σ_0 e descarregado em seguida, percorrendo o caminho $O_0Y_0Z_0O_1$. Entre O_0 e Y_0 , o corpo de prova se encontra no regime elástico, e toda deformação apresentada seria recuperada caso a carga fosse removida. Em Y_0 , o limite de escoamento inicial do material é atingido, a partir do qual o corpo apresentará deformação plástica. Entre Y_0 e Z_0 , o corpo de prova se encontra no regime plástico. A carga é aumentada até que se atinja a tensão σ_0 , correspondente ao ponto Z_0 , a partir do qual a carga é removida completamente. O ponto O_1 corresponde à deformação permanente resultante do ensaio. Em seguida, carrega-se novamente o corpo de prova, o qual realiza o caminho $O_1Y_1Z_1$.

A partir do ensaio uniaxial, é possível identificar algumas propriedades fenomenológicas, as quais são (Souza Neto et al., 2008):

1. A existência do regime elástico, dentro do qual o comportamento do material pode ser considerado puramente elástico, ou seja, sem evolução da deformação plástica, sendo delimitado pelo limite de escoamento. Na Figura 2.1, as regiões elásticas são O_0Y_0 e O_1Y_1 e os limites de escoamento são as tensões correspondentes aos pontos Y_0 e Y_1 .
2. A evolução da deformação plástica acontece quando o material é carregado acima do limite de escoamento.
3. O limite de escoamento também evolui, acompanhando a evolução da deformação plástica, fenômeno conhecido como endurecimento.

O endurecimento é caracterizado pela dependência do limite de escoamento do material em relação ao histórico de carregamento e deformação plástica a que foi submetido (Souza Neto et al., 2008). Os materiais podem apresentar comportamentos de plasticidade ideal, endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático, ou ainda uma combinação de endurecimentos isotrópico e cinemático. Na plasticidade ideal, não há endurecimento, ou seja, o limite de escoamento não varia de acordo com o nível de deformação plástica. Assim, a superfície de escoamento, definida como a superfície no espaço das tensões principais em que a função de escoamento se iguala a zero, não é alterada. O endurecimento isotrópico é caracterizado por uma expansão uniforme da superfície de escoamento inicial, sem translação. O endurecimento cinemático, por sua vez, é caracterizado pela translação da superfície de escoamento no espaço das tensões, preservando a forma e o tamanho da superfície inicial (Souza Neto et al., 2008). A Figura 2.2 ilustra o efeito dos diferentes tipos de endurecimento sobre a superfície de escoamento, e sobre a curva tensão-deformação em um ensaio uniaxial cíclico.

2.1.1 PLASTICIDADE CÍCLICA

A plasticidade cíclica está diretamente associada ao endurecimento cinemático e a carregamentos cíclicos. Quando um espécime é carregado além do limite de escoamento em uma direção (sofrendo, então, endurecimento), há uma diminuição no limite de escoamento na direção oposta (Prager, 1955). Esse fenômeno é conhecido como efeito de Bauschinger, podendo ser modelado matematicamente pelo endurecimento cinemático. Tal efeito é especialmente evidenciado em carregamentos cíclicos, pois a reversão do carregamento influencia o limite de escoamento na direção contrária e assim sucessivamente em cada mudança de direção, o que faz com que a superfície de escoamento esteja constantemente transladando.

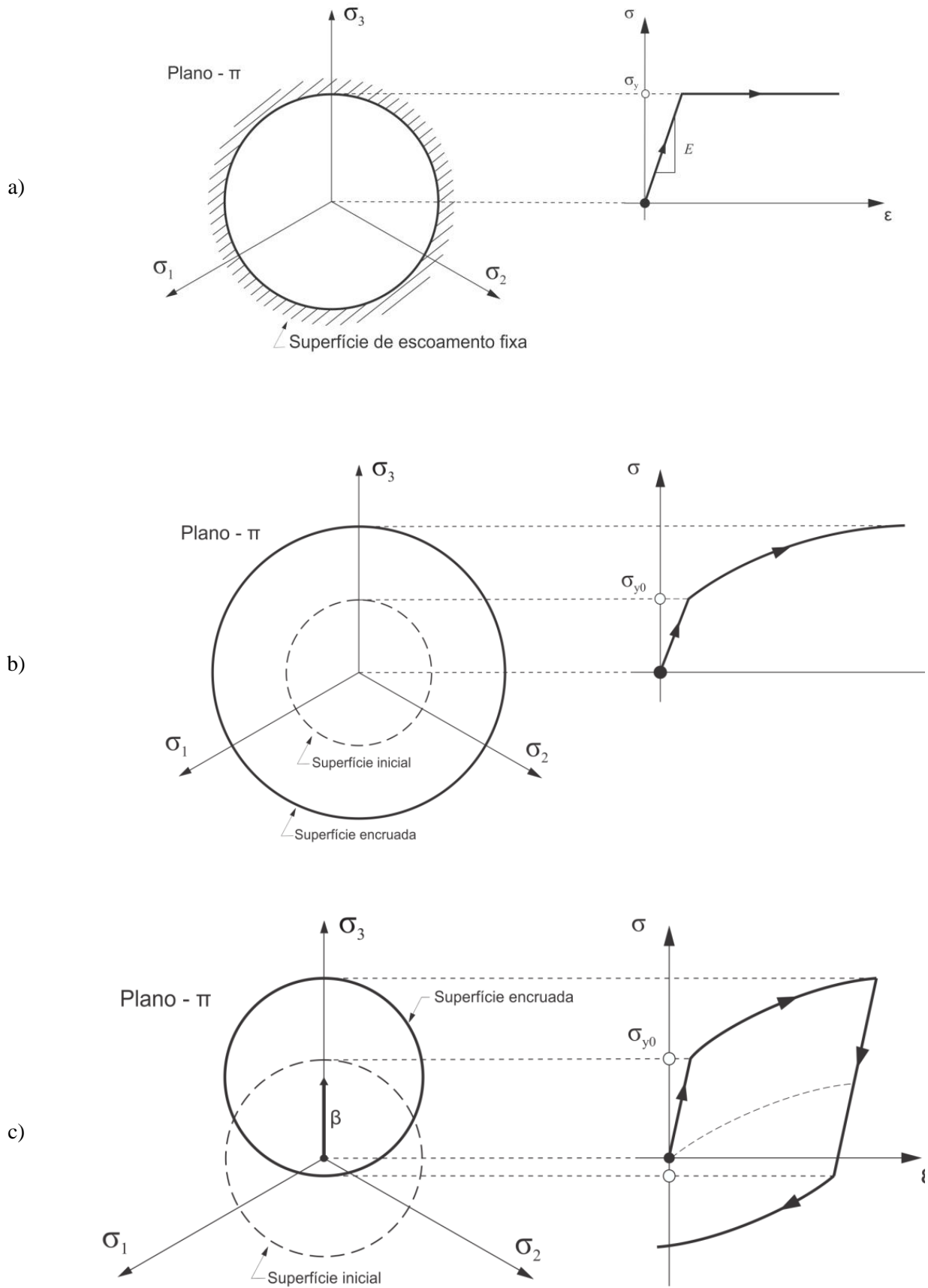


Figura 2.2 – Comparação entre os diferentes tipos de endurecimento. (a) Endurecimento ideal; (b) Endurecimento isotrópico; (c) Endurecimento cinemático.

A Equação 2.1 define a função de escoamento para o endurecimento cinemático utilizando o critério de von Mises, na qual $\boldsymbol{\eta}$, dado pela Eq. 2.2, é o tensor relativo, definido como a diferença entre a parte desviadora do tensor tensão ($\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma})$) e $\boldsymbol{\beta}$, conhecido como tensor tensão de endurecimento cinemático. A tensão de endurecimento cinemático define a translação da superfície em relação ao ponto inicial, enquanto σ_y define o raio da superfície de escoamento. A Figura 2.3 ilustra o efeito do endurecimento cinemático na superfície de escoamento.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}))} - \sigma_y \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\beta} \quad (2.2)$$

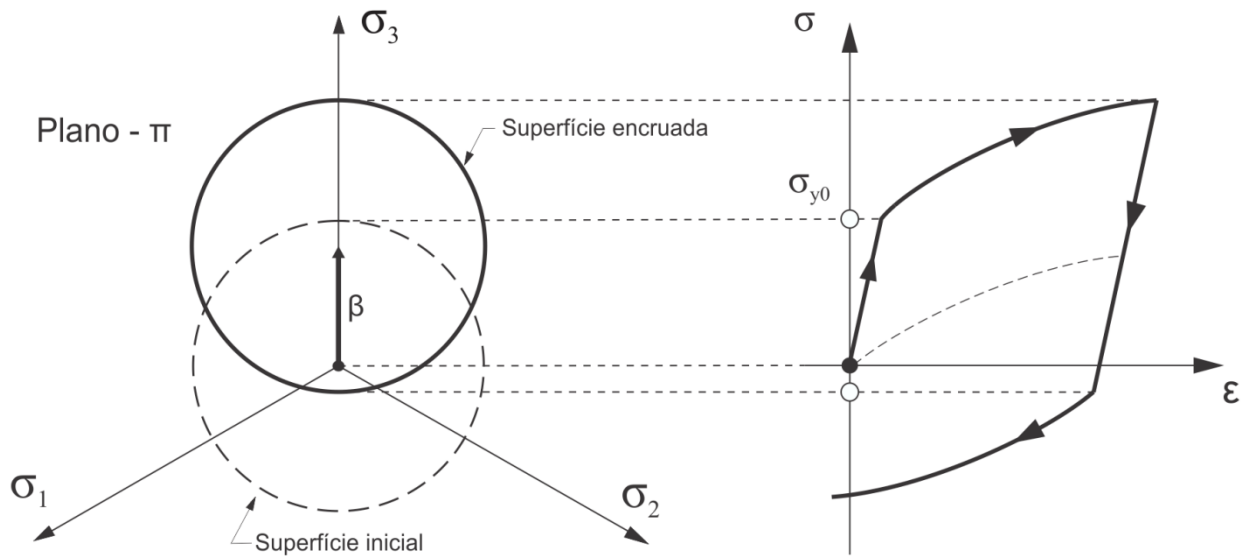


Figura 2.3 – Efeito do endurecimento cinemático na superfície de escoamento.

Para a elaboração de um modelo matemático consistente, é necessário definir a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático em relação ao tempo, ou seja, sua lei de evolução. Dentre as leis elaboradas, destacam-se as propostas por Prager (1955), Armstrong-Frederick (1966) e Chaboche (1986), descritas a seguir.

2.1.2 PRAGER

A lei de endurecimento cinemático de Prager é definida de acordo com a Eq. 2.3, na qual H^k é o módulo de endurecimento cinemático linear, uma constante material (Prager, 1955).

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.3)$$

A lei de Prager se baseia em uma relação linear entre a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático e a taxa de evolução da deformação plástica ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$), com constante de

proporcionalidade igual ao módulo de endurecimento cinemático (H^k). Assim, quanto maior a evolução da deformação plástica, maior a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático.

A linearidade da relação tensão-deformação obtida pela lei de Prager é o principal motivo de críticas ao uso desse modelo. Apesar de descrever de maneira adequada alguns aspectos do efeito de Bauschinger, o modelo não descreve bem carregamentos complexos, envolvendo descarregamentos e carregamentos subsequentes em direções reversas (Chaboche, 1986). A Figura 2.4 compara o modelo de Prager com as tendências experimentais (representadas pelas linhas tracejadas).

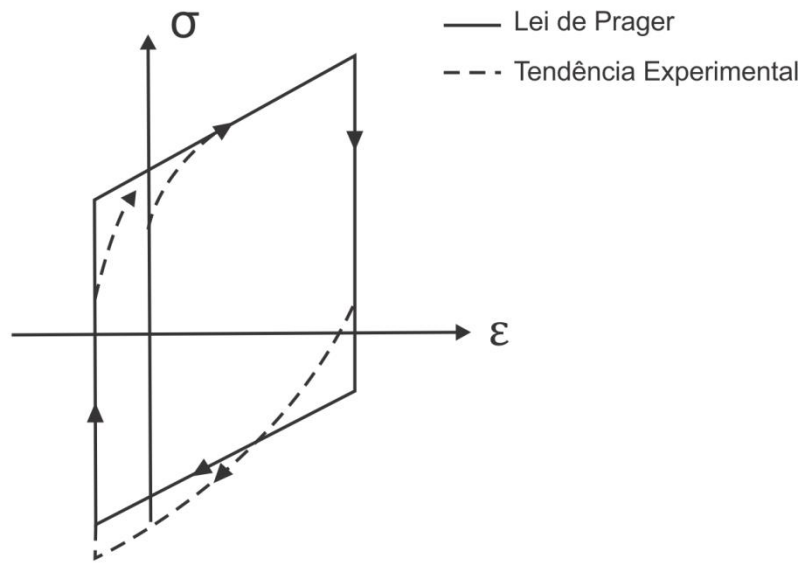


Figura 2.4 – Comparação entre o modelo de Prager e a tendência experimental em carregamento uniaxial.

2.1.3 ARMSTRONG-FREDERICK

A lei de endurecimento linear de Prager pode ser modificada pela introdução de um termo não linear. Assim, dá-se uma evolução não linear da tensão de endurecimento cinemático, resultando em uma descrição aceitável dos carregamentos cíclicos, como a concavidade das curvas tensão-deformação sob carregamentos de tensão e compressão, por exemplo (Chaboche, 1986). Armstrong & Frederick (1966) propuseram uma modificação da lei de evolução de Prager de acordo com a Eq. 2.4, na qual $\dot{\epsilon}^p$ representa a taxa de crescimento da deformação plástica equivalente e b é uma constante do material.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b \boldsymbol{\beta} \quad (2.4)$$

O termo extra $(-\dot{\epsilon}^p b \boldsymbol{\beta})$ introduz o efeito da saturação na lei de endurecimento cinemático. Utilizando o critério de von Mises, o termo de saturação passa a ser representada por $\dot{\gamma} b \boldsymbol{\beta}$ e

corresponde a um valor máximo para o módulo de β , a partir do qual o material passa a se comportar como perfeitamente plástico (Souza Neto et al., 2008). Assim, quanto maior β , menor será sua evolução, o que faz com que o encruamento diminua conforme β aumenta.

A utilização do modelo não linear de Armstrong-Frederick não corrige apenas a forma do laço de histerese, mas também aspectos relativos à estabilização do ciclo, como o fornecimento de relações entre as amplitudes do ciclo estabilizado (Chaboche, 1986).

Dentre as principais vantagens do modelo de Armstrong-Frederick, estão a não linearidade das evoluções de tensão-deformação e a modelagem adequada do efeito de Bauschinger (Chaboche, 1989).

2.1.4 CHABOCHE

Apesar de resultar em boas estimativas do efeito de Bauschinger, o modelo de Armstrong-Frederick resulta em superestimativas dos efeitos de *ratchetting*. Assim, Chaboche (1986), propôs a generalização do modelo de Armstrong-Frederick, de acordo com a Eq. 2.5, na qual m é o número desejado de termos no somatório.

$$\dot{\beta} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\epsilon}^p - \dot{\epsilon}^p b_i \beta_i \right) \quad (2.5)$$

O modelo de Chaboche permite maior flexibilidade no ajuste dos parâmetros materiais (H^k e b), mantendo as vantagens do modelo de Armstrong-Frederick, inclusive a não linearidade. Assim, os efeitos superestimados por Armstrong-Frederick podem ser adequadamente calculados por este modelo (Chaboche, 1989).

Entretanto, a introdução do somatório faz com que sejam necessárias mais informações a respeito do material. Na lei linear de Prager, a única constante material presente é o módulo de endurecimento cinemático (H^k) e, portanto, apenas uma constante precisa ser calibrada de acordo com curvas experimentais. Na lei de Armstrong-Frederick, há a introdução de uma nova constante material (b). Assim, é necessário calibrar o modelo para duas constantes: b e H^k . No modelo de Chaboche, haverá ‘ $2m$ ’ termos a serem calibrados. Geralmente, fazendo-se m igual a 3 resulta em boa correlação do modelo com os dados experimentais. Assim, seria necessário calibrar o modelo para 6 constantes materiais (Chaboche, 1986).

2.2 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Nesta seção será tratada a formulação do modelo matemático elastoplástico para o caso tridimensional, considerando o critério de escoamento de von Mises e endurecimento exclusivamente cinemático, descrito pela lei de evolução de Chaboche. Além disso, o modelo será considerado independente do tempo, ou seja, não serão considerados efeitos viscoplásticos. Finalmente, consideraremos plasticidade associativa, a qual implica que a taxa de deformação plástica é um tensor normal à superfície de escoamento no espaço das tensões (Souza Neto et al., 2008). Para o equacionamento do modelo, é necessário definir a função de escoamento e determinar o vetor de fluxo, a lei de fluxo plástico e as leis de evolução para as outras variáveis internas.

1) Função de escoamento:

A Equação 2.6 descreve a função de escoamento para o critério de escoamento de von Mises com endurecimento cinemático. Assim, $\boldsymbol{\eta}$ descreve o tensor relativo, determinado segundo a Eq. 2.2, e σ_{y0} descreve o limite de escoamento inicial.

$$\phi = \bar{q}(\boldsymbol{\eta}) - \sigma_{y0} \quad (2.6)$$

$$\bar{q} = \sqrt{3J_2(\boldsymbol{\eta})} \quad (2.7)$$

O tensor relativo tem caráter puramente desviador, já que é resultado de uma soma entre dois tensores desviadores (\boldsymbol{s} e $\boldsymbol{\beta}$). Assim, seu segundo invariante pode ser descrito pela Eq. 2.8.

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta} \quad (2.8)$$

Substituindo a Eq. 2.8 na Eq. 2.7, tem-se que:

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} \quad (2.9)$$

2) Vetor de Fluxo:

Para plasticidade associativa, o vetor de fluxo é definido como a derivada parcial da função de escoamento em relação ao tensor tensão, ou seja, segundo a Eq. 2.10.

$$\boldsymbol{N} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial [\bar{q} - \sigma_{y0}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.10)$$

Substituindo a função de escoamento definida pela Eq. 2.6 e efetuando a derivação e as manipulações algébricas, obtém-se a Eq. 2.11, a qual define o vetor de fluxo para este modelo.

$$\boldsymbol{N} = \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}} \quad (2.11)$$

3) Lei de Fluxo Plástico:

A lei de fluxo plástico determina a taxa de evolução da deformação plástica, sendo definida segundo a Eq. 2.12, na qual $\dot{\gamma}$ é chamado de multiplicador plástico. Para o vetor de fluxo determinado pela Eq. 2.11, a lei de fluxo é dada pela Eq. 2.13.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \equiv \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.12)$$

Substituindo o vetor de fluxo definido pela Eq. 2.11, obtém-se a Eq. 2.13, a qual define a taxa de evolução da deformação plástica para este modelo.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\eta}{2\bar{q}} \quad (2.13)$$

4) Lei de Evolução das Outras Variáveis Internas

A primeira variável interna a ser analisada é a deformação plástica equivalente ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), cuja evolução é definida pela Eq. 2.14.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (2.14)$$

Substituindo a taxa de deformação plástica, obtemos a Eq. 2.15, a qual descreve a taxa de variação (evolução) da deformação plástica equivalente.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = \dot{\gamma} \quad (2.15)$$

Finalmente, é necessário definir a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático. Utilizando a lei de evolução de Chaboche, a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático é dada segundo a Eq. 2.16.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{2}{3} H_i^k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\gamma} b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.16)$$

Substituindo a taxa de evolução da deformação plástica ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$), definida pela Eq. 2.13, na Eq. 2.16 e realizando as devidas manipulações algébricas, tem-se que a taxa de variação da tensão de endurecimento cinemático é dada segundo a Eq. 2.17.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \sum_{i=1}^m \left(H_i^k \frac{\eta}{\bar{q}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right) \quad (2.17)$$

5) Lei de Hooke generalizada

Finalmente, o tensor tensão é dado segundo a lei de Hooke generalizada, descrita na Eq. 2.18.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.18)$$

Na equação acima, \mathbb{D}^e é o tensor constitutivo, definido de acordo com a Eq. 2.19, em que E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

$$\mathbb{D}^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das equações que governam o modelo elastoplástico de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 2.1 – Modelo elastoplástico com função de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático de Chaboche.

| | | |
|------|------------------------------------|--|
| i) | Decomposição aditiva da deformação | $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$ |
| ii) | Lei de Hooke | $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ |
| iii) | Função de Escoamento | $\phi = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\eta}} - \sigma_{y0}$ $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta}$ |
| iv) | Lei de Fluxo Plástico | $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{3\boldsymbol{\eta}}{2\bar{q}}$ <p>E Lei de Evolução das Outras Variáveis Internas</p> $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$ $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma} \sum_{i=1}^m \left(H_i^k \frac{\boldsymbol{\eta}}{\bar{q}} - b_i \boldsymbol{\beta}_i \right)$ |
| v) | Regra de Complementaridade | $\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0$ |

3 ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA

3.1 INTRODUÇÃO

Para materiais e modelos com comportamento dependente da trajetória, como modelos elastoplásticos, a solução do conjunto de equações do modelo constitutivo requer a formulação de um algoritmo de integração numérica, já que soluções analíticas para o problema de valor inicial definido por essas equações não são geralmente conhecidas para essas trajetórias complexas (Souza Neto et al., 2008). Assim, para a solução do modelo matemático apresentado no Capítulo 2 (Modelo de von Mises com Endurecimento Cinemático de Chaboche) é necessário formular um algoritmo de integração numérica, já que são modelos elastoplástico e, portanto, dependentes da trajetória.

O problema, então, consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar a tensão e as variáveis internas. Estabelece-se, portanto, um pseudo-intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$, onde o estado n é conhecido e deseja-se obter o estado $n + 1$. Dentro do pseudo-tempo, a atualização da tensão (σ_{n+1}) e das variáveis internas (α_{n+1}) é dado segundo as Eq. 4.1 e 4.2 (Souza Neto et al., 2008). Posteriormente, é aplicada uma discretização das equações constitutivas no pseudo-tempo, com base no esquema de Euler implícito.

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (4.1)$$

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (4.2)$$

A atualização das tensões e das variáveis internas é feita dividindo o problema em duas partes: (I) o preditor plástico, no qual o problema é assumido completamente elástico; e (II) o corretor plástico, no qual um sistema de equações residuais, formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução, é resolvido, tomando como valor inicial os valores encontrados no preditor elástico. O corretor plástico é utilizado quando a função de escoamento é violada, e, então, utiliza-se o método de Newton-Raphson para resolver o sistema de equações não-lineares discretizado, devido à sua taxa de convergência quadrática.

A Figura 4.1 apresenta o algoritmo de atualização (algoritmo de mapeamento de retorno), das tensões e das variáveis internas. Inicialmente, é dado um incremento de deformação $\Delta\varepsilon$, o qual se assume como sendo completamente elástico. A partir disso, obtém-se o estado tentativa, $(*)^{trial}$. Após, é feita a avaliação da função de escoamento para o estado tentativa (ϕ^{trial}). Caso ϕ^{trial} seja igual ou menor que zero, significa que o passo dado foi puramente elástico, e o estado real $n + 1$ é o estado tentativa, ou seja, $(*) = (*)^{trial}$. Caso contrário, ou seja, $\phi^{trial} > 0$, o incremento de deformação possui componente plástico e é necessário aplicar o corretor plástico.

Nas próximas seções serão discutidos os algoritmos de retorno para o modelo elaborado no capítulo 2, ou seja, o Modelo de von Mises com Endurecimento Cinemático. Será utilizada a lei de evolução da tensão de endurecimento cinemático de Chaboche com três termos, ou seja, $m = 3$. O desenvolvimento pode ser expandido para um número maior de termos. O algoritmo de integração numérica desenvolvido está descrito no Anexo I.

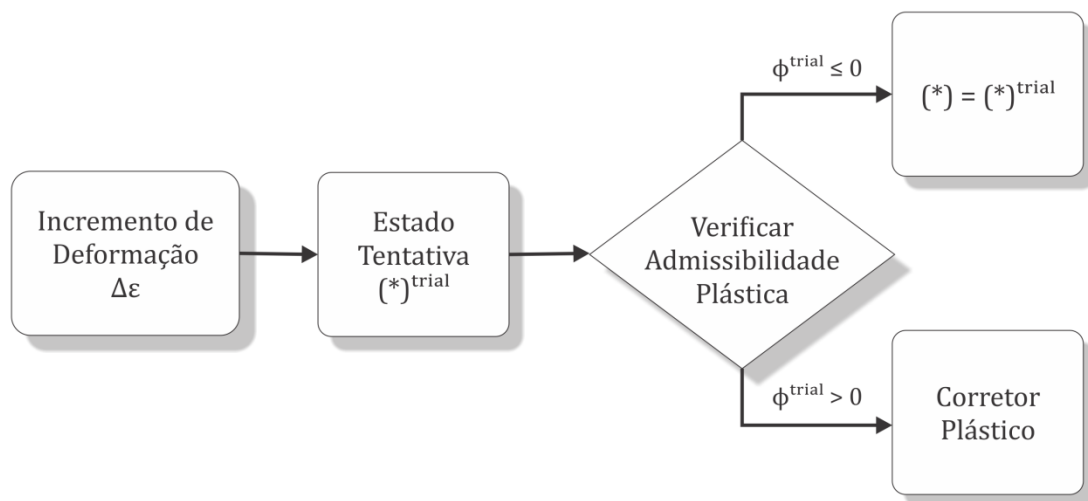


Figura 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas.

3.2 MODELO DE VON MISES COM ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Para este modelo, com endurecimento cinemático dado pela lei de evolução de Chaboche, o estado tentativa é dado como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p & \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial} &= \boldsymbol{\beta}_n \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial} &= \bar{\varepsilon}_n^p\end{aligned}\tag{3.3}$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$ é o tensor das deformações elásticas, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ o tensor das tensões, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial}$ o tensor das deformações plásticas, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}$ o tensor tensão de endurecimento cinemático, e $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\,trial}$ a deformação plástica equivalente, todos no estado tentativa. Como neste o passo é elástico, não há variação na deformação plástica nem na tensão de endurecimento cinemático, já que é assumido que o limite de escoamento não foi atingido.

Como há endurecimento cinemático, é necessário definir o tensor relativo tentativa ($\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial}$), o qual é dado segundo a Eq. 3.4.

$$\boldsymbol{\eta}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{trial}\tag{3.4}$$

O termo $\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial}$ se refere à parte desviadora do tensor tensão tentativa, determinada segundo a Eq. 3.5, em que a constante G representa a constante de Lamé denominada de módulo de cisalhamento.

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^{trial} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}\tag{3.5}$$

Em seguida, é necessário avaliar a função de escoamento no estado tentativa (ϕ^{trial}), ou seja, verificar se o estado do material construído acima se encontra dentro ou fora do limite de escoamento. A função de escoamento para o modelo de von Mises com endurecimento puramente cinemático é calculada segundo a Eq. 3.6.

$$\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}\tag{3.6}$$

O termo \bar{q}_{n+1}^{trial} representa a tensão equivalente de von Mises, dada segundo a Eq. 3.7.

$$\bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}}\tag{3.7}$$

Caso ϕ^{trial} seja igual ou menor que zero, o material se encontra dentro do regime elástico e verifica-se, então, que o passo dado foi puramente elástico. O estado real $n + 1$ é o estado tentativa, ou seja, $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$. Caso contrário, ou seja, $\phi^{trial} > 0$, é possível constatar que o material se

encontra dentro do regime plástico, o incremento de deformação prescrito possui componente plástico e é necessário aplicar o corretor plástico para corrigir o estado tentativa.

A correção do estado tentativa é feita removendo o incremento de deformação plástica da deformação elástica tentativa, que passa a ser expressa segundo a Eq. 3.8.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.8)$$

O incremento de deformação plástica é determinado com base na Lei de Fluxo Plástico (Eq. 2.12), a qual, discretizada, fornece a Eq. 3.9, em que $\mathbf{N}_{n+1} = 3\boldsymbol{\eta}_{n+1}/2\bar{q}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$ representa o multiplicador plástico.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \quad (3.9)$$

Substituindo a Eq. 3.9 em 3.8, tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.10)$$

A Equação 3.10 pode ser reescrita em termos do campo de tensões, na forma da Eq. 3.11.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.11)$$

O tensor das tensões pode ser decomposto em uma parte desviadora (\mathbf{S}_{n+1}) e uma parte volumétrica ($p_{n+1}\mathbf{I}$), conforme a Eq. 3.12.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1}\mathbf{I} \quad (3.12)$$

Dessa forma, a equação de atualização da tensão (Eq. 3.11) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}_{n+1} + p_{n+1}\mathbf{I} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + p_{n+1}^{trial}\mathbf{I} - 2G\Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.13)$$

Entretanto, a função de escoamento de von Mises é insensível à pressão hidrostática, não alterando o termo volumétrico, ou seja, $p_{n+1} = p_{n+1}^{trial}$. Assim, a equação de atualização da tensão pode ser reescrita em função do tensor desviador (\mathbf{S}_{n+1}), de acordo com a Eq. 3.14.

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1} \quad (3.14)$$

O tensor da deformação plástica pode ser atualizado segundo a Eq. 3.15. Ao invés de remover o incremento de deformação plástica, este deve ser adicionado.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \frac{3\boldsymbol{\eta}_{n+1}}{2\bar{q}_{n+1}} \quad (3.15)$$

A deformação plástica equivalente é atualizada segundo sua lei de evolução, definida pela Eq. 2.15. De forma discretizada, a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Eq. 3.16.

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \quad (3.16)$$

Para a evolução da tensão de endurecimento cinemático, é necessário considerar o número de termos no somatório de Chaboche. Considerando três termos não lineares, tem-se que:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \quad (3.17)$$

Analisando a Eq. 3.17, é necessário considerar a atualização de cada termo de tensão de endurecimento cinemático ($\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i$) separadamente, para depois atualizar $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ como a soma dos termos. Segundo a lei de Chaboche (Eq. 2.17), cada termo pode ser atualizado como:

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^i = \boldsymbol{\beta}_n^i + \Delta\gamma \left(\frac{2H_i^k}{3} \mathbf{N}_{n+1} - b_i \boldsymbol{\beta}_{n+1}^i \right) \quad (3.18)$$

Finalmente, a função de escoamento no estado real é dada segundo a Eq. 3.15.

$$\phi_{n+1} = \bar{q}_{n+1} - \sigma_{y0} \quad (3.19)$$

Analisando as Eqs. 3.14, 3.16, 3.18 e 3.19, verifica-se a formação de um sistema não linear de equações, cujas variáveis, para dois termos de Chaboche, são \mathbf{S}_{n+1} , $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$, $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$, já que seus valores são desconhecidos no estado real.

Para aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema de equações deve ser escrito na forma de equações residuais, conforme a Eq. 3.20.

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{S}_{n+1}} &= \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \\ R_{\Delta\gamma} &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} \mathbf{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} \mathbf{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} \mathbf{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dessa forma, a Tab. 3.1 apresenta de forma resumida o algoritmo de retorno para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

Tabela 3.1 – Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

| | |
|------|---|
| i) | Dado um incremento de deformação $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, determinar o estado tentativa: |
| | $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p$ $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbb{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{i\ trial} = \boldsymbol{\beta}_n^i \quad \bar{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}}$ |
| ii) | Verificar a admissibilidade plástica: |
| | $\phi^{trial} = \bar{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_{y0}$ <p>Se $\phi^{trial} \leq 0$, então (passo elástico): $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$;</p> <p>Se $\phi^{trial} > 0$, então (passo plástico): Algoritmo de retorno</p> |
| iii) | Algoritmo de retorno: |
| | <p>Resolver o sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson, tendo como variáveis \boldsymbol{S}_{n+1}, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ e $\Delta \gamma$.</p> $\left\{ \begin{array}{l} R_{\boldsymbol{S}_{n+1}} = \boldsymbol{S}_{n+1} - \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} + 2G\Delta\gamma\boldsymbol{N}_{n+1} \\ R_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p - \Delta\gamma \\ R_{\Delta\gamma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} : \boldsymbol{\eta}_{n+1}} - \sigma_{y0} \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 - \boldsymbol{\beta}_n^1 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\beta}_n^2 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \right) \\ R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 - \boldsymbol{\beta}_n^3 - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} \boldsymbol{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \right) \end{array} \right.$ |
| iv) | Atualizar as outras variáveis internas |
| | $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{S}_{n+1} + p_{n+1}^{trial} \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 + \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} + \Delta\gamma \boldsymbol{N}_{n+1}$ |
| v) | Fim |

Para a aplicação do método de Newton-Raphson, o sistema deve ser escrito na linearizada, de acordo com a Eq. 3.21.

A Tabela 3.2 mostra, de forma resumida, a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. O estado inicial, ou seja, para $k = 0$, é tomado como sendo o estado tentativa.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \beta_{n+1}^1 \\ \delta \beta_{n+1}^2 \\ \delta \beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \quad (3.21)$$

Tabela 3.2 – Algoritmo de resolução do sistema não linear para o modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche.

i) Dado o estado tentativa como parâmetros iniciais:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \bar{\varepsilon}_n^p \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0 \quad \beta_{n+1}^{i(0)} = \beta_{n+1}^{i trial}$$

ii) Resolver o sistema de equações para \mathbf{S}_{n+1} , β_{n+1}^1 , β_{n+1}^2 , β_{n+1}^3 , $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\gamma$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \delta S_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \\ \delta \beta_{n+1}^1 \\ \delta \beta_{n+1}^2 \\ \delta \beta_{n+1}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} R_{S_{n+1}} \\ R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \\ R_{\Delta\gamma} \\ R_{\beta_{n+1}^1} \\ R_{\beta_{n+1}^2} \\ R_{\beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^k$$

iii) Calcular:

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^{i(k+1)} &= \beta_{n+1}^{i(k)} + \delta \beta_{n+1}^{i(k+1)} & \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} &= \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} & \Delta\gamma^{(k+1)} &= \Delta\gamma^{(k)} + \delta \Delta\gamma^{(k+1)} \end{aligned}$$

iv) Verificar a convergência:

$$\phi^{(k+1)} = \bar{q}^{(k+1)} - \sigma_{y0} \quad \text{erro} = \frac{\phi^{(k+1)}}{\sigma_{y0}} \leq \text{tolerância}$$

v) Fim.

Na Tabela 3.2, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} &= \mathbb{I} + 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial S_{n+1}} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} &= 2GN_{n+1} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^1} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= 2G\Delta\gamma \frac{\partial N_{n+1}}{\partial \beta_{n+1}^3}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial S_{n+1}} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} &= -1 \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= \mathbf{0} \\
\frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^3} &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} &= N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= 0 \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} &= 0 \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} &= -N_{n+1} \\
\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} &= -N_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} = -\mathbf{N}_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_1^k \mathbf{N}_{n+1} - b_1 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1 \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_1^k}{3} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} - b_1 \mathbb{I} \right) \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_1^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_2^k \mathbf{N}_{n+1} - b_2 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2 \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_2^k}{3} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} - b_2 \mathbb{I} \right) \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^2}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_2^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} &= -\frac{2}{3} H_3^k \mathbf{N}_{n+1} - b_3 \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3 \\ \frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1}\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= -\Delta\gamma \frac{2}{3} H_3^k \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} \\
\frac{\partial R_{\boldsymbol{\beta}_{n+1}^3}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= \mathbb{I} - \Delta\gamma \left(\frac{2H_3^k}{3} \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} - b_3 \mathbb{I} \right) \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= \frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^1} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^2} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right] \\
\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^3} &= -\frac{3}{2\bar{q}_{n+1}} \left[\mathbb{I} - \frac{3}{2(\bar{q}_{n+1})^2} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\eta}_{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.26}$$

3.3 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Para a implementação do modelo numérico apresentado em um desenvolvimento de elementos finitos, é necessário obter o operador tangente consistente com o algoritmo de integração, para se construir a matriz de rigidez. Para o caso elástico, em que o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, o operador tangente no psuedotempo t_{n+1} passa a ser simplesmente o operador elástico (\mathbb{D}), descrito pela Eq. 3.27.

$$\widehat{\mathbb{D}}^e = \mathbb{D} \tag{3.27}$$

Entretanto, em um caso elasto-plástico, em que se assume a existência do fluxo plástico, o operador tangente ($\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$) é definido de acordo com a Eq. 3.28, em que $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ representa a função algorítmica constitutiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno descrito acima.

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \tag{3.28}$$

Para o modelo de von Mises, a metodologia aplicada para determinação do operador tangente consistente com o algoritmo de atualização de tensões é determinado a partir da Eq. 3.21 escrita na forma inversa, de acordo com a Eq. 3.29.

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \\ d\beta_{1\ n+1} \\ d\beta_{2\ n+1} \\ d\beta_{3\ n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} & \mathbb{C}_{15} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} & \mathbb{C}_{25} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} & \mathbb{C}_{35} & \mathbb{C}_{36} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} & \mathbb{C}_{45} & \mathbb{C}_{46} \\ \mathbb{C}_{51} & \mathbb{C}_{52} & \mathbb{C}_{53} & \mathbb{C}_{54} & \mathbb{C}_{55} & \mathbb{C}_{56} \\ \mathbb{C}_{61} & \mathbb{C}_{62} & \mathbb{C}_{63} & \mathbb{C}_{64} & \mathbb{C}_{65} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Na equação acima, os termos \mathbb{C}_{22} , \mathbb{C}_{23} , \mathbb{C}_{32} e \mathbb{C}_{33} representam escalares. Os termos da forma \mathbb{C}_{ij} (\mathbb{C}_{12} , por exemplo) representam tensores de segunda ordem, enquanto que os termos da forma \mathbb{C}_{ij} (\mathbb{C}_{11} , por exemplo) representam tensores de quarta ordem. A matriz dos coeficientes é dada pela Eq. 3.30.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} & \mathbb{C}_{15} & \mathbb{C}_{16} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} & \mathbb{C}_{25} & \mathbb{C}_{26} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} & \mathbb{C}_{35} & \mathbb{C}_{36} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} & \mathbb{C}_{45} & \mathbb{C}_{46} \\ \mathbb{C}_{51} & \mathbb{C}_{52} & \mathbb{C}_{53} & \mathbb{C}_{54} & \mathbb{C}_{55} & \mathbb{C}_{56} \\ \mathbb{C}_{61} & \mathbb{C}_{62} & \mathbb{C}_{63} & \mathbb{C}_{64} & \mathbb{C}_{65} & \mathbb{C}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{S_{n+1}}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\Delta\gamma}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^1}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^2}}{\partial \beta_{n+1}^3} \\ \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial S_{n+1}} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^1} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^2} & \frac{\partial R_{\beta_{n+1}^3}}{\partial \beta_{n+1}^3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.30)$$

A partir da Eq. 3.30, tem-se que:

$$\mathbb{D}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \mathbb{C}_{11} : \mathbb{D}^e \quad (3.31)$$

A operação $(\mathbb{C}_{11} : \mathbb{D})$ representa a composição entre o tensor de quarta ordem \mathbb{C}_{11} e o tensor de quarta ordem \mathbb{D} , dado pela matriz de elasticidade.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados os resultados referentes à implementação do modelo de von Mises com endurecimento cinemático de Chaboche. Primeiramente, o modelo é calibrado por amplitude de tensão, utilizando os resultados presentes na literatura (Pereira, 2014). Em seguida, é feita uma comparação entre a estratégia implícita desenvolvida neste trabalho e a estratégia explícita, implementada por Pereira (2014), para os aços 304 e S460N, considerando os modelos de Armstrong-Frederick e de Chaboche. Os resultados obtidos de Pereira (2014) são correspondentes, em todas as simulações, ao modelo de Chaboche.

Em todas as simulações, foram utilizados dois termos de Armstrong-Frederick e um termo de Prager na lei de evolução de Chaboche, resultando na evolução do tensor tensão de endurecimento cinemático conforme a Eq. 4.1.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{2}{3} H_1^k \boldsymbol{\varepsilon}^p - \dot{\gamma} b_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \frac{2}{3} H_2^k \boldsymbol{\varepsilon}^p - \dot{\gamma} b_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \frac{2}{3} H_3^k \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (4.1)$$

Foram realizadas simulações para determinar a capacidade do modelo apresentado em descrever o comportamento elasto-plástico dos materiais estudados em carregamentos proporcionais e não proporcionais. Além disso, comparou-se as respostas do modelo para a estratégia implícita apresentada neste estudo e para a estratégia explícita apresentada por Pereira (2014), bem como para os resultados experimentais presentes na literatura.

Foram analisados quatro carregamentos distintos (Fig. 4.1): uniaxiais de tração-compressão (A); uniaxiais de cisalhamento puro (B); multiaxiais proporcionais (C); e multiaxiais não proporcionais com trajetória retangular (D). Para todos os carregamentos, foram utilizadas as mesmas amplitudes de deformação, bem como o mesmo número de passos (6400 passos por ciclo), para comparação com Pereira (2014). A análise foi feita com base nas amplitudes de tensão em ciclo estabilizado (após 200 ciclos). Entretanto, resultados semelhantes podem ser obtidos com discretizações menos refinadas e menos ciclos para estabilização.

A seção 4.3 compara os resultados experimentais e da estratégia explícita aos resultados implícitos do modelo de Armstrong-Frederick. A seção 4.4 compara os mesmos resultados à estratégia implícita segundo o modelo de Chaboche. Em seguida, a seção 4.5 apresenta comparações entre os resultados experimentais e da estratégia explícita para carregamentos não proporcionais. Finalmente, a seção 4.6 compara os modelos de Armstrong-Frederick e de Chaboche. O modelo de Armstrong-Frederick foi implementado utilizando Chaboche com $n = 3$ e H_2^k, H_3^k, b_2 e b_3 iguais a zero.

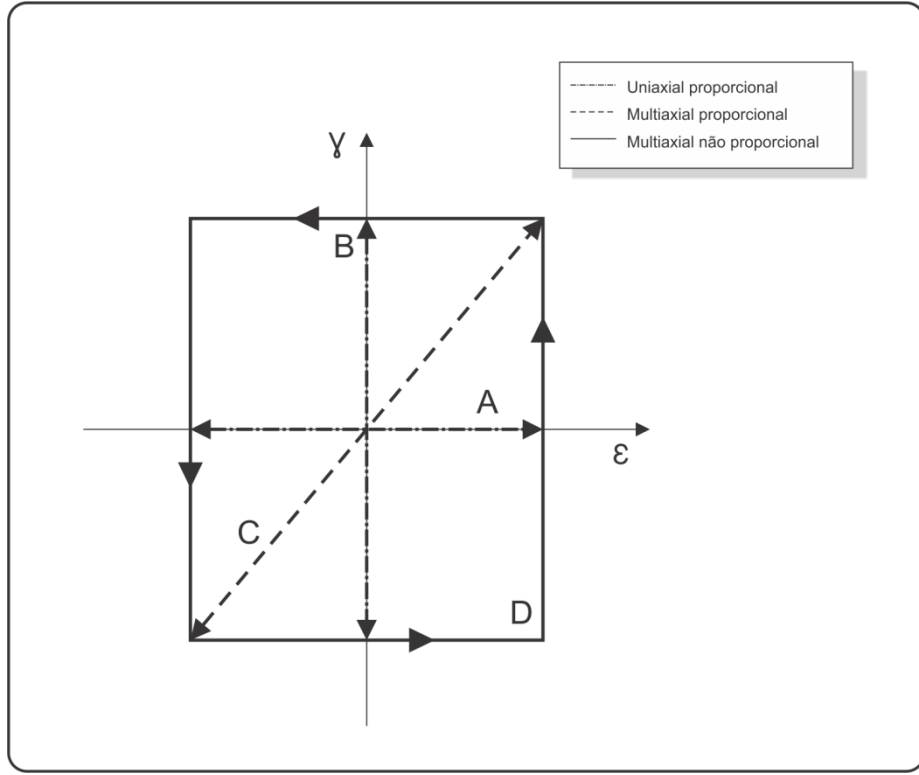


Figura 4.1 – Históricos de carregamentos considerados nas simulações.

4.2 IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS

A identificação dos parâmetros foi feita com base na relação de Ramberg-Osgood (1943) (Eq. 4.2), que relaciona a amplitude de tensão (σ_a) e a amplitude de deformação plástica (ε_a^p). Na Equação 4.2, H' e n' são parâmetros materiais, os quais foram obtidos de Itoh (2001) para o aço 304, Jiang et al. (2007) para o aço S460N e Lesse & Morrow (1985) para o aço SAE 1045 HR. Assim, tendo os parâmetros H' e n' , a curva de Ramberg-Osgood pôde ser obtida e calibrada para os parâmetros de Chaboche (H_i^k , b_i e σ_{y0}).

$$\varepsilon_a^p = \left(\frac{\sigma_a}{H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (4.2)$$

Os parâmetros de Ramberg-Osgood para cada aço, bem como os resultados da calibração obtida por Pereira (2014) para os modelos de Armstrong-Frederick e Chaboche, estão listados na Tab. 4.1 e 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Armstrong-Frederick (Pereira, 2014) e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304 e S460N.

| Parâmetro | Aço | | |
|---------------------|------------------|----------------------------|--------------------------------|
| | 304 (Itoh, 2001) | S460N (Jiang et al., 2007) | 1045 HR (Lesse & Morrow, 1985) |
| H' (MPa) | 2443,2 | 1115 | 1258 |
| n' | 0,334 | 0,161 | 0,208 |
| H^k (MPa) | 82636 | 62837 | 65300 |
| b | 319,5 | 378,6 | 362,4 |
| σ_{y0} (MPa) | 160,2 | 264,1 | 234 |
| E (GPa) | 193 | 208,5 | 202 |
| ν | 0,29 | 0,3 | 0,3 |

Tabela 4.2 – Resultados da calibração por amplitude para o modelo de Chaboche (Pereira, 2014) e parâmetros da curva de Ramberg-Osgood obtidos da literatura para os aços 304 e S460N.

| Parâmetro | Aço | | |
|---------------------|------------------|----------------------------|--------------------------------|
| | 304 (Itoh, 2001) | S460N (Jiang et al., 2007) | 1045 HR (Lesse & Morrow, 1985) |
| H' (MPa) | 2443,2 | 1115 | 1258 |
| n' | 0,334 | 0,161 | 0,208 |
| H_1^k (MPa) | 89382 | 38718 | 87559 |
| H_2^k (MPa) | 46742 | 90521 | 39124 |
| H_3^k (MPa) | 28087 | 15903 | 17917 |
| b_1 | 1547,4 | 486 | 1612,5 |
| b_2 | 454,2 | 1637,3 | 477,2 |
| σ_{y0} (MPa) | 118,1 | 264,1 | 194,6 |
| E (GPa) | 193 | 208,5 | 202 |
| ν | 0,29 | 0,3 | 0,3 |

4.3 MODELO DE ARMSTRONG-FREDERICK

A Tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos para a estratégia implícita segundo o modelo de Armstrong-Frederick, a estratégia explícita (Pereira, 2014) e os resultados experimentais para os aços 304 (Itoh, 2001) e aço S460N (Jiang et al., 2007). As Figuras 4.2 a 4.9 apresentam os resultados para cada trajetória para o aço 304. As Figuras 4.10 a 4.17 apresentam os resultados para cada trajetória para o aço S460N.

Tabela 4.3 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, explícita e implícita segundo o modelo de Armstrong-Frederick para os casos A, B, C e D e aços 304 e S460N.

| <i>Material</i> | <i>Caso</i> | ε_a (%) | γ_a (%) | σ_a^{exp} (MPa) | τ_a^{exp} (MPa) | $\sigma_a^{explicito}$ (MPa) | $\tau_a^{explicito}$ (MPa) | $\sigma_a^{implicito}$ (MPa) | $\tau_a^{implicito}$ (MPa) |
|------------------|-------------|---------------------|----------------|------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| <i>Aço 304</i> | <i>A</i> | 0,4 | 0 | 315 | 0 | 323 | 0 | 464 | 0 |
| | <i>B</i> | 0 | 0,695 | - | - | 0 | 192 | 0 | 192 |
| | <i>C</i> | 0,4 | 0,695 | 295 | 125 | 264 | 158 | 419 | 163 |
| | <i>D</i> | 0,4 | 0,695 | 530 | 278 | 333 | 197 | 493 | 212 |
| <i>Aço S460N</i> | <i>A</i> | 0,173 | 0 | - | - | 303 | 0 | 331 | 0 |
| | <i>B</i> | 0 | 0,3 | - | - | 0 | 184 | 0 | 189 |
| | <i>C</i> | 0,173 | 0,3 | 244 | 147 | 244 | 152 | 275 | 155 |
| | <i>D</i> | 0,173 | 0,3 | 362 | 227 | 323 | 193 | 334 | 194 |

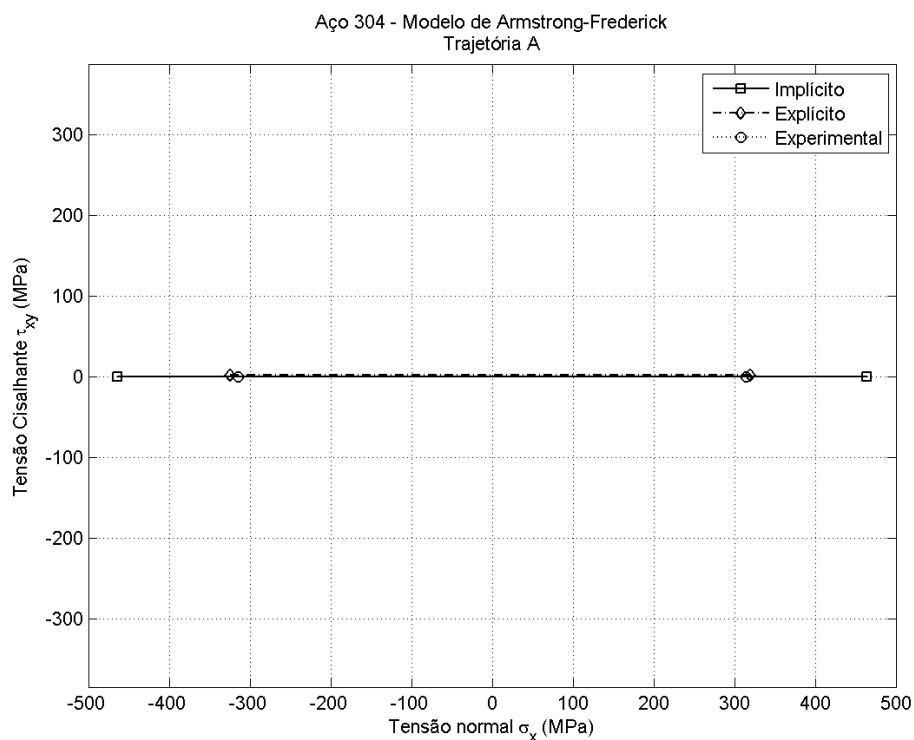


Figura 4.2 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

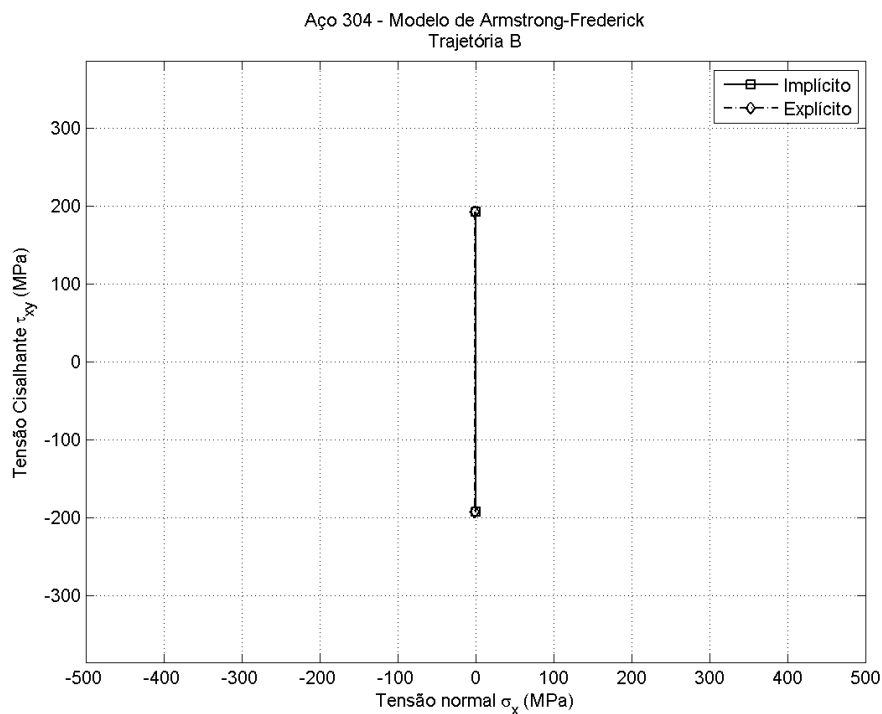


Figura 4.3– Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

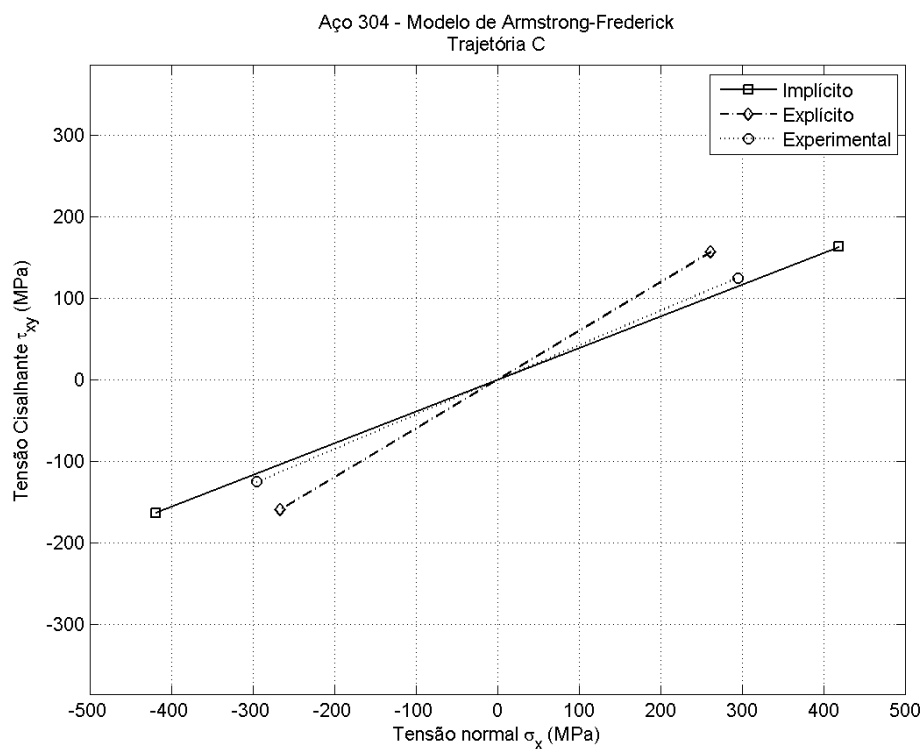


Figura 4.4 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

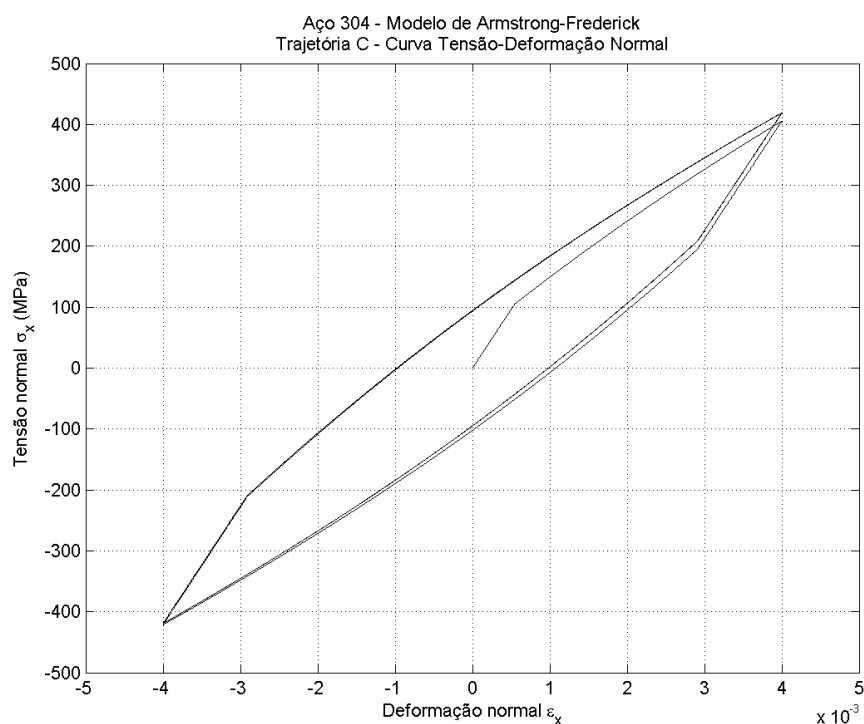


Figura 4.5 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

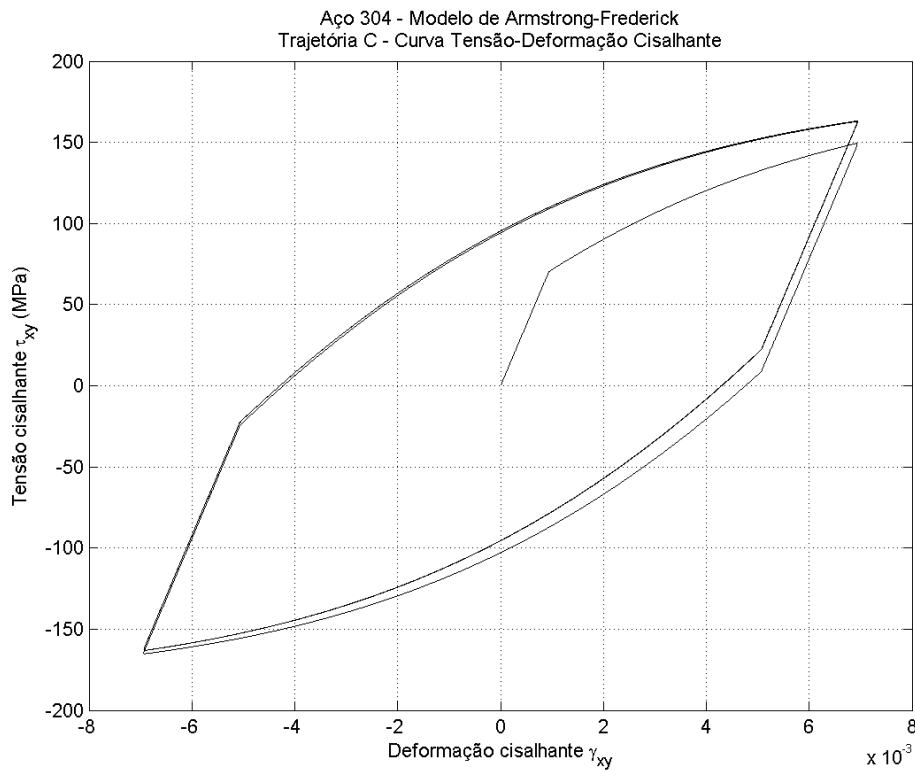


Figura 4.6 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

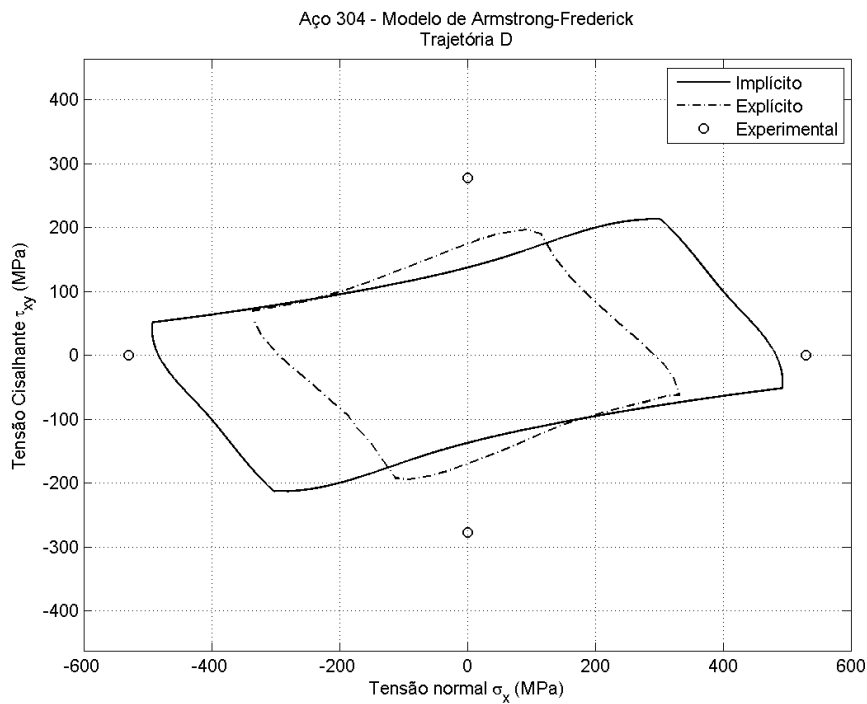


Figura 4.7 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

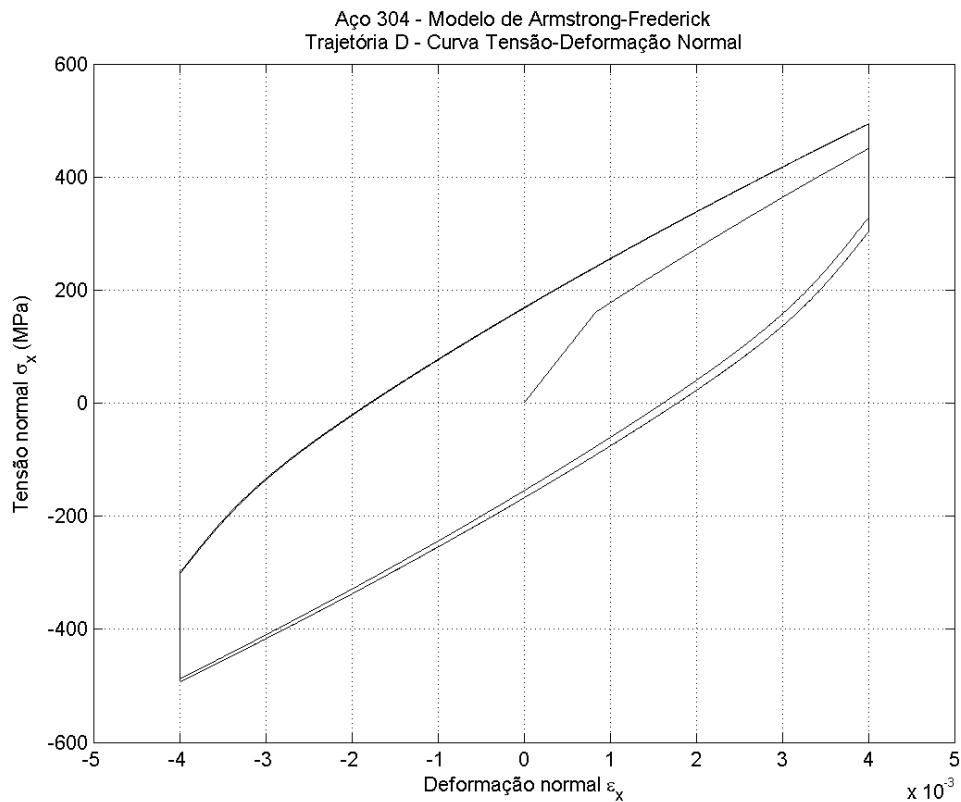


Figura 4.8 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

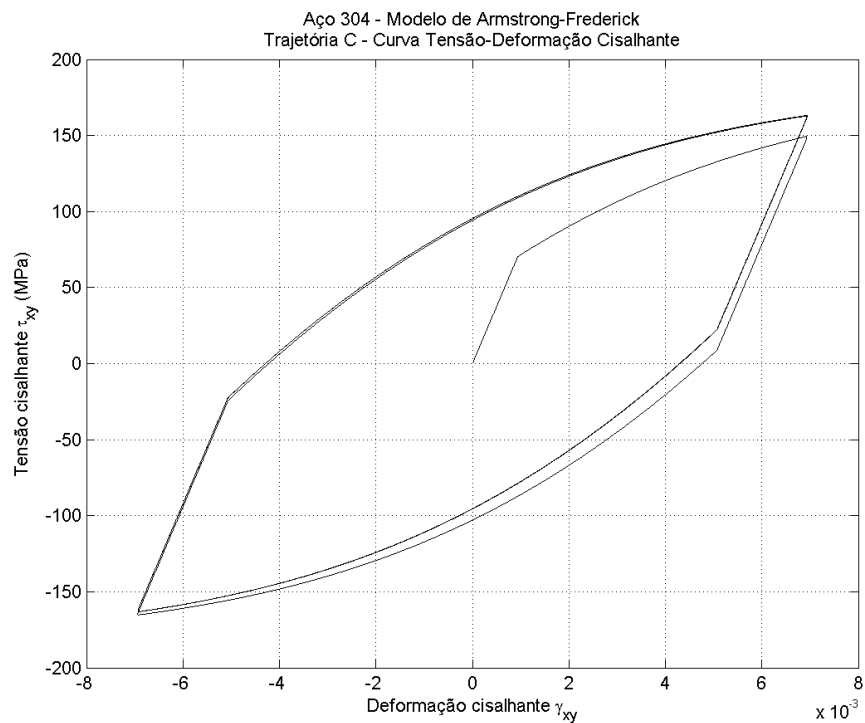


Figura 4.9 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

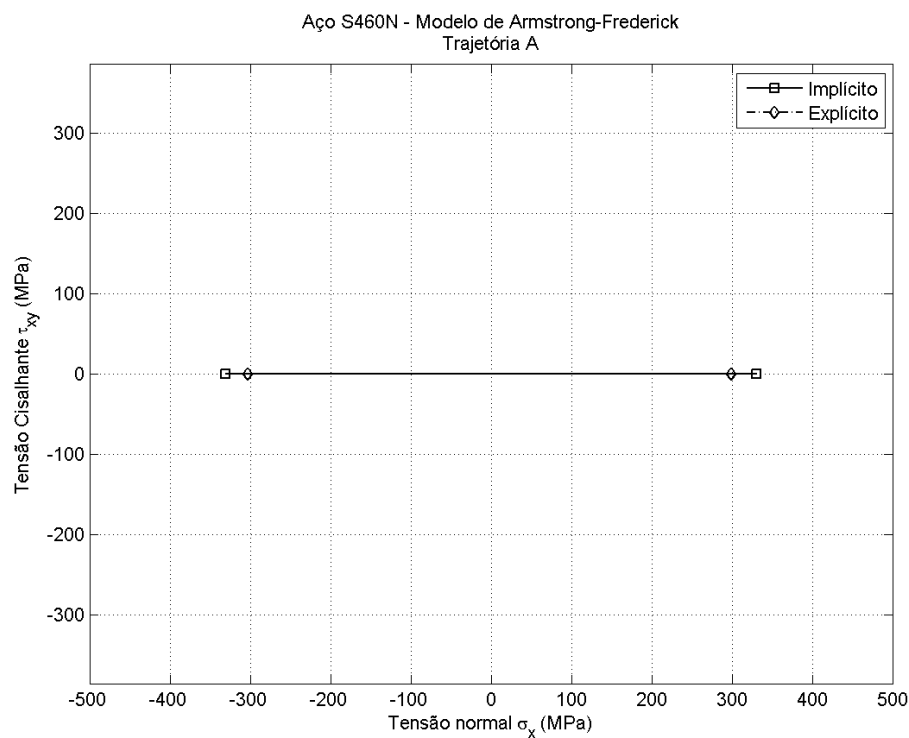


Figura 4.10 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

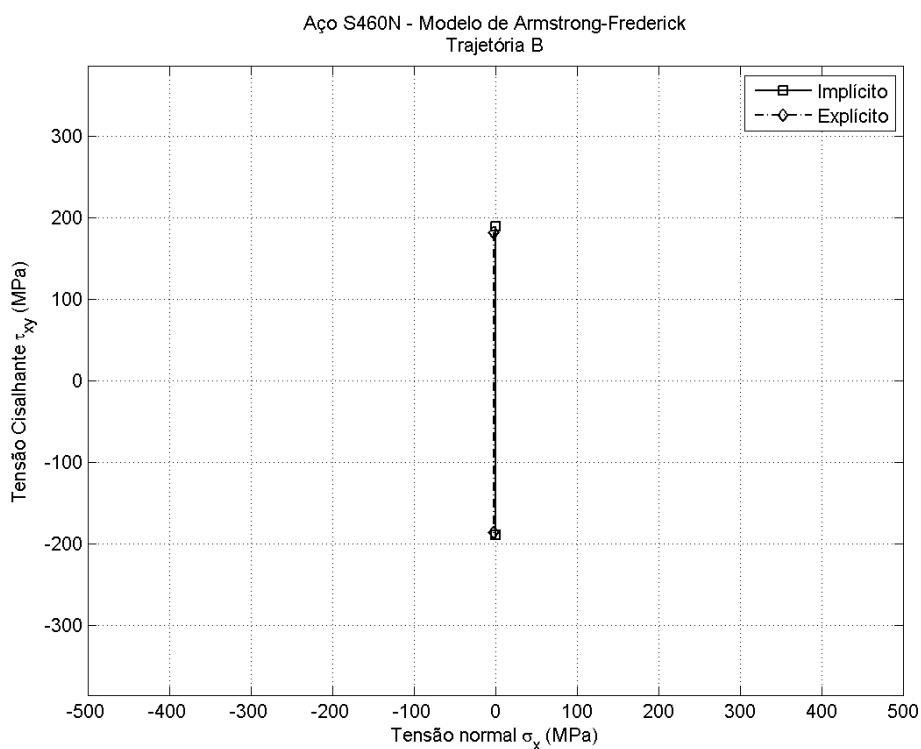


Figura 4.11 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito e Chaboche explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

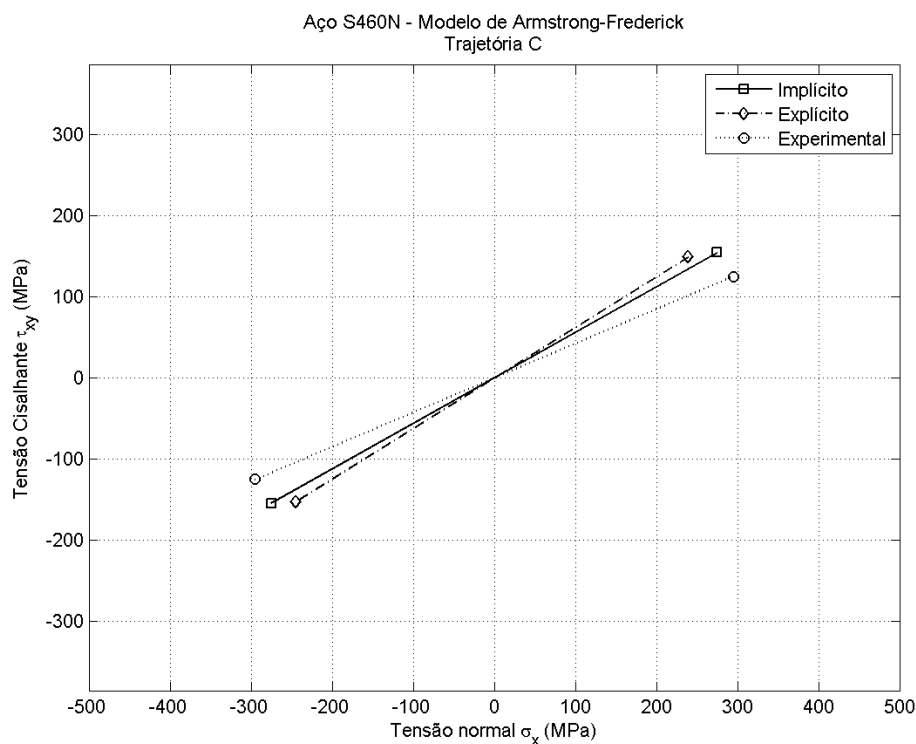


Figura 4.12 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

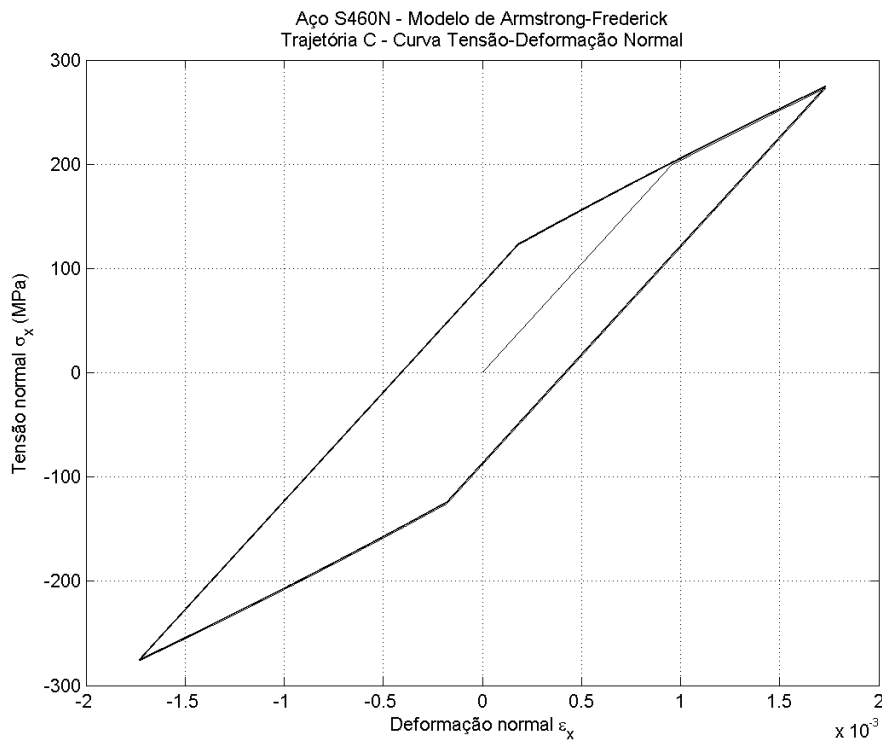


Figura 4.13 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

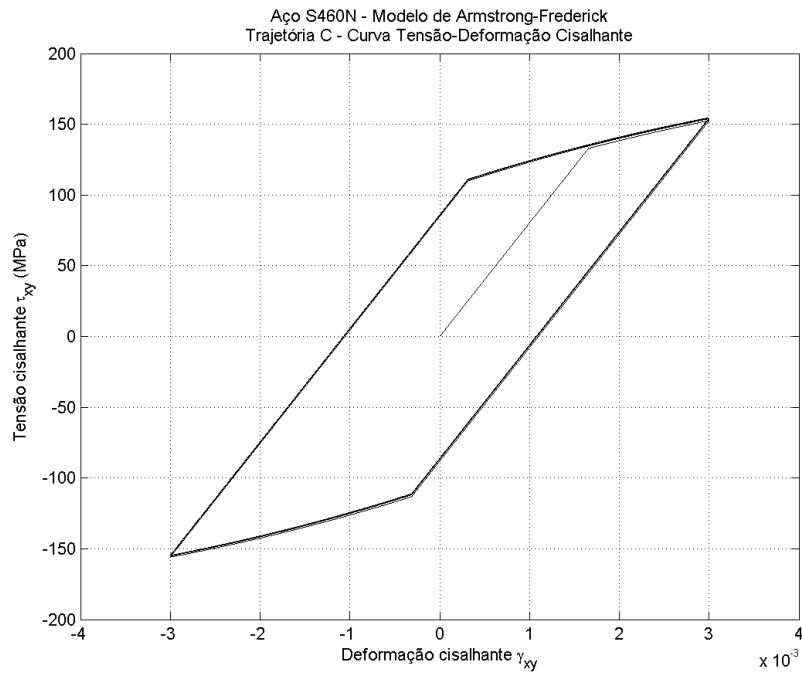


Figura 4.14 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

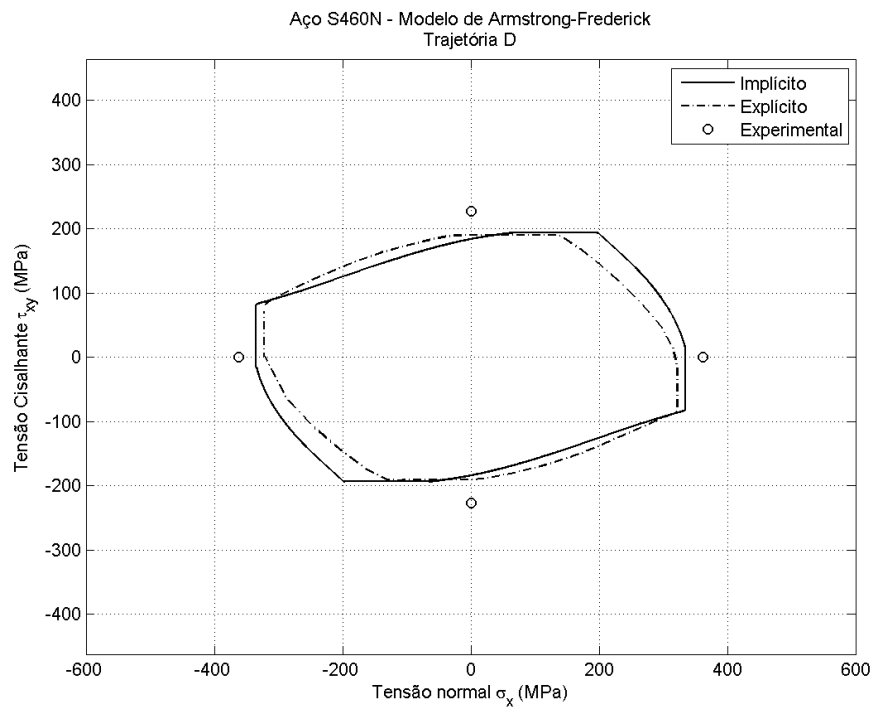


Figura 4.15– Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Armstrong-Frederick implícito, Chaboche explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

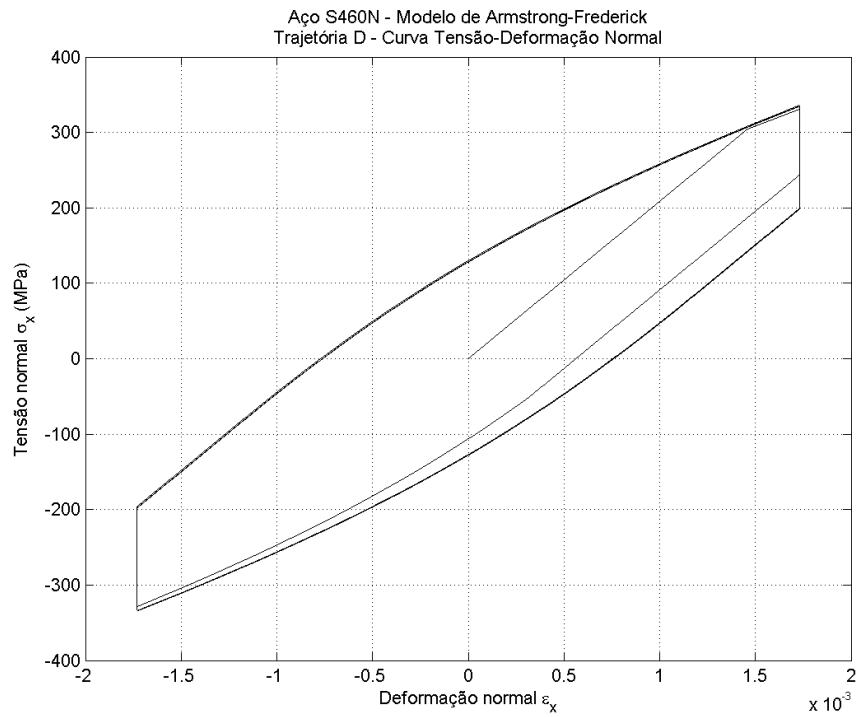


Figura 4.16 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

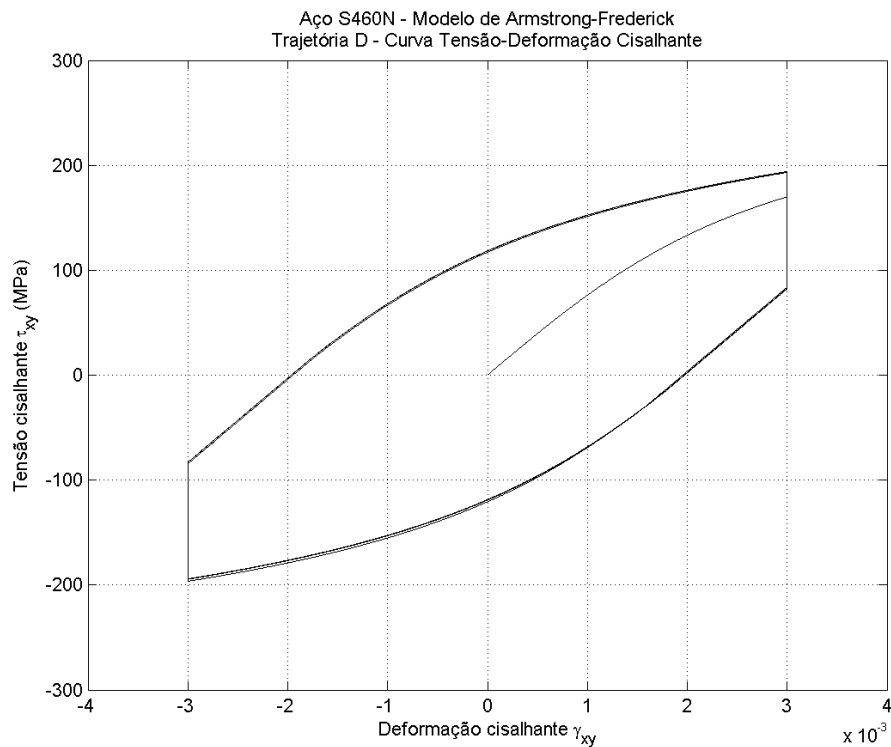


Figura 4.17 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Armstrong-Frederick implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

4.4 MODELO DE CHABOCHE

A Tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos para a estratégia implícita, explícita (Pereira, 2014) e os resultados experimentais para o aço 304 (Itoh, 2001) e aço S460N (Jiang et al., 2007). As Figuras 4.18 a 4.25 apresentam os resultados para cada trajetória para o aço 304. As Figuras 4.26 a 4.33 apresentam os resultados para cada trajetória para o aço S460N.

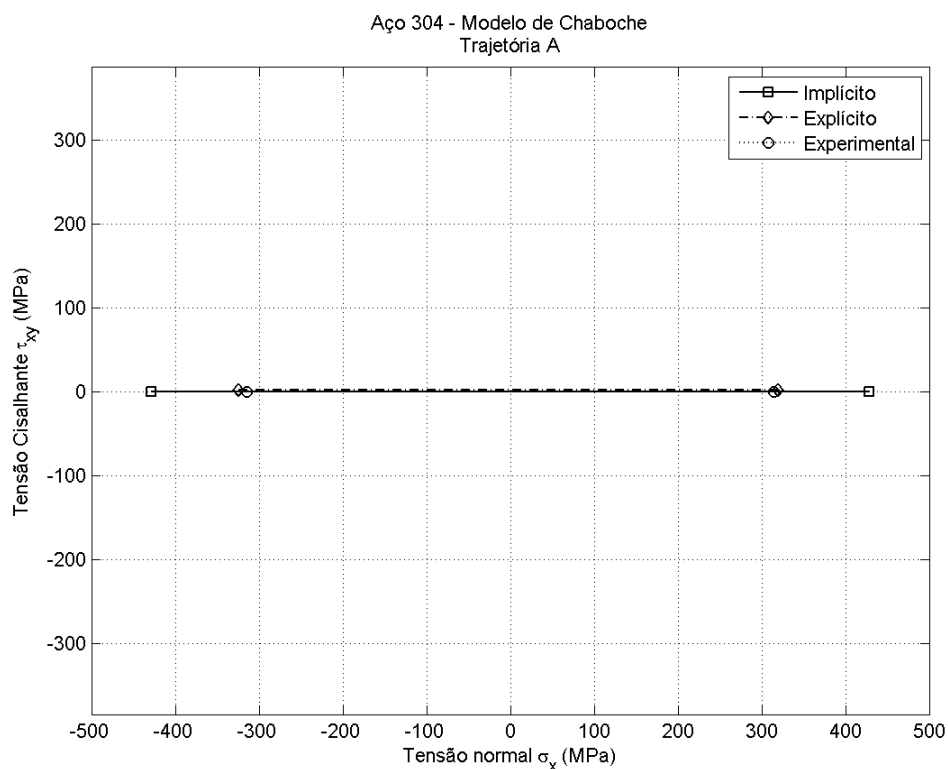


Figura 4.18 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

Tabela 4.4 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, implícita segundo o modelo de Chaboche e explícita para os casos A, B, C e D e aços 304 e S460N.

| <i>Material</i> | <i>Caso</i> | ε_a (%) | γ_a (%) | σ_a^{exp} (MPa) | τ_a^{exp} (MPa) | $\sigma_a^{explicito}$ (MPa) | $\tau_a^{explicito}$ (MPa) | $\sigma_a^{implicito}$ (MPa) | $\tau_a^{implicito}$ (MPa) |
|------------------|-------------|---------------------|----------------|------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| <i>Aço 304</i> | <i>A</i> | 0,4 | 0 | 315 | 0 | 323 | 0 | 428 | 0 |
| | <i>B</i> | 0 | 0,695 | - | - | 0 | 192 | 0 | 153 |
| | <i>C</i> | 0,4 | 0,695 | 295 | 125 | 264 | 158 | 376 | 120 |
| | <i>D</i> | 0,4 | 0,695 | 530 | 278 | 333 | 197 | 437 | 158 |
| <i>Aço S460N</i> | <i>A</i> | 0,173 | 0 | - | - | 303 | 0 | 318 | 0 |
| | <i>B</i> | 0 | 0,3 | - | - | 0 | 184 | 0 | 181 |
| | <i>C</i> | 0,173 | 0,3 | 244 | 147 | 244 | 152 | 270 | 150 |
| | <i>D</i> | 0,173 | 0,3 | 362 | 227 | 323 | 193 | 332 | 191 |

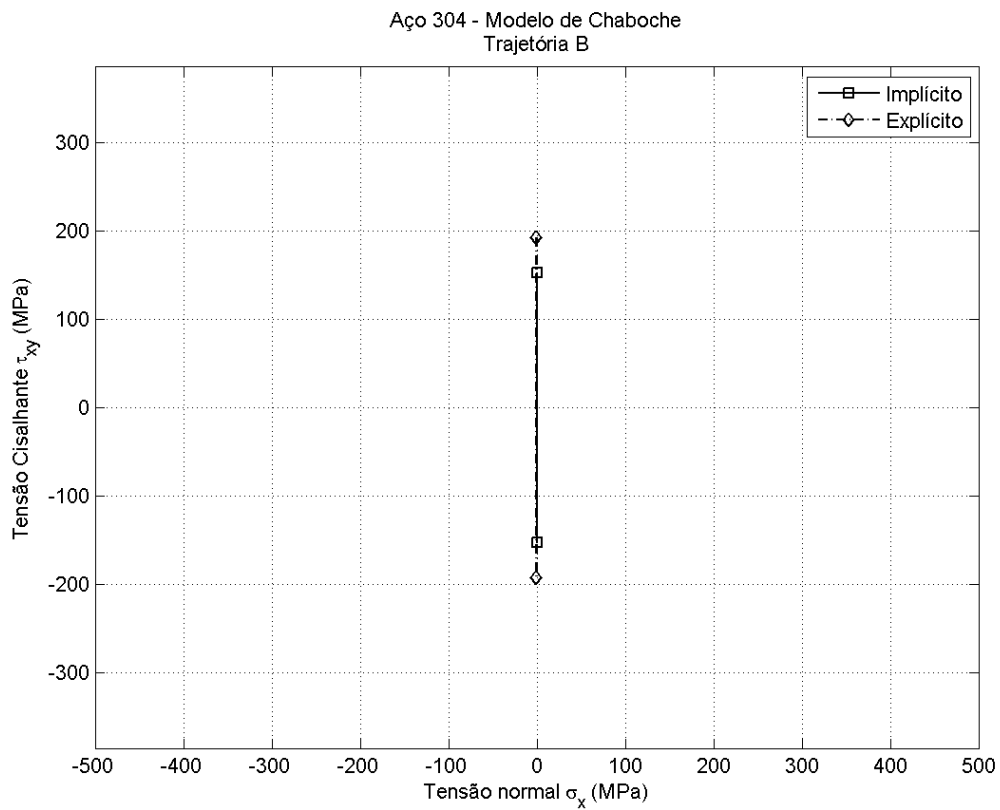


Figura 4.19 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0\%$ e $\gamma_a = 0,695\%$.

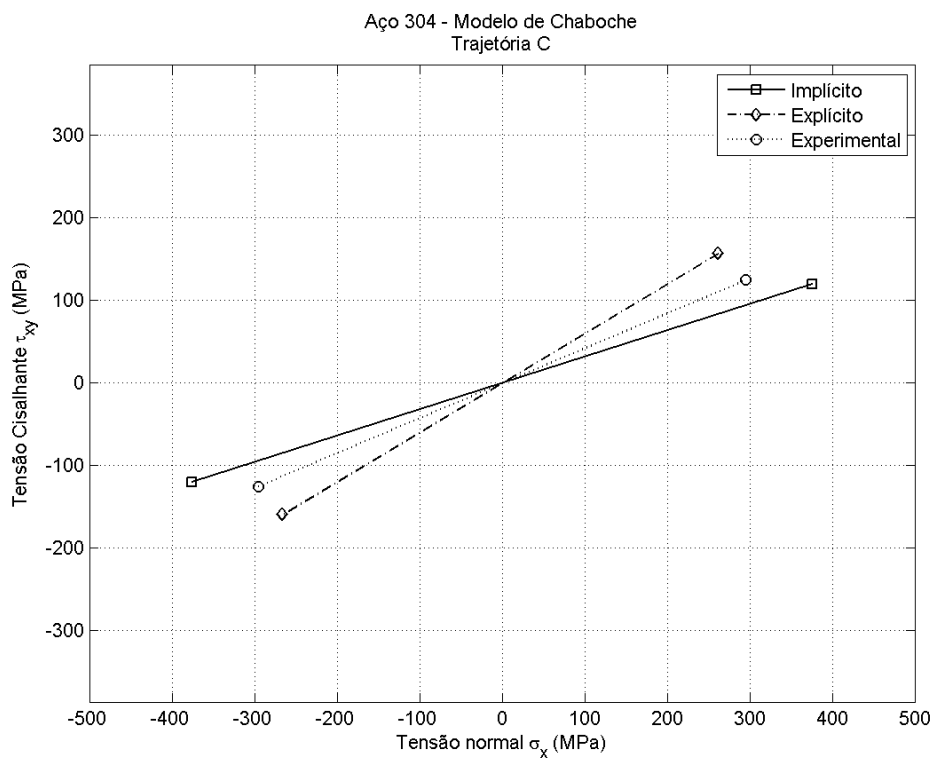


Figura 4.20 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

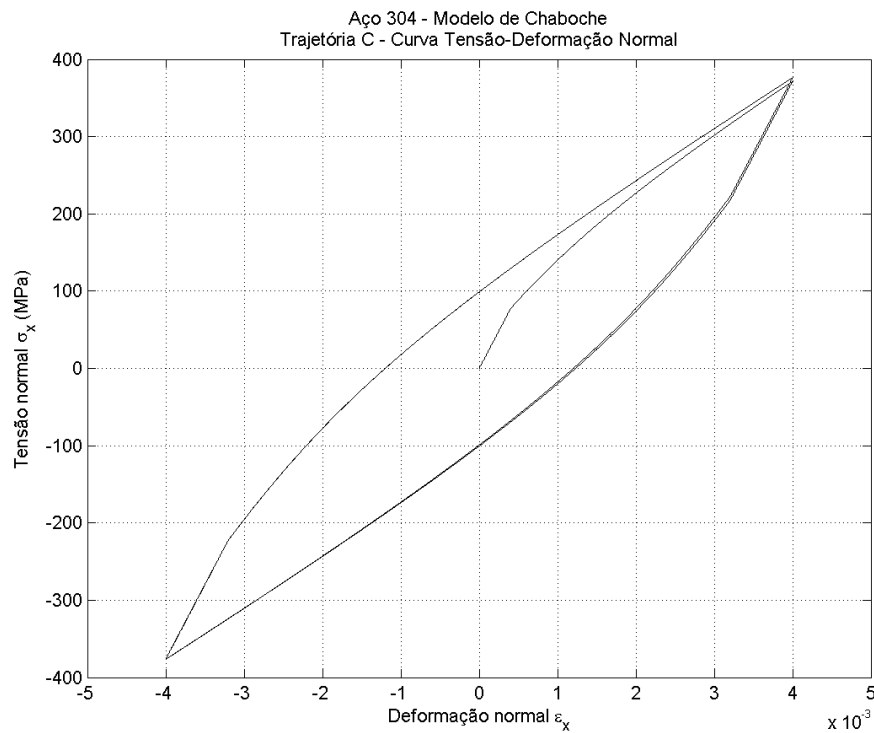


Figura 4.21 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

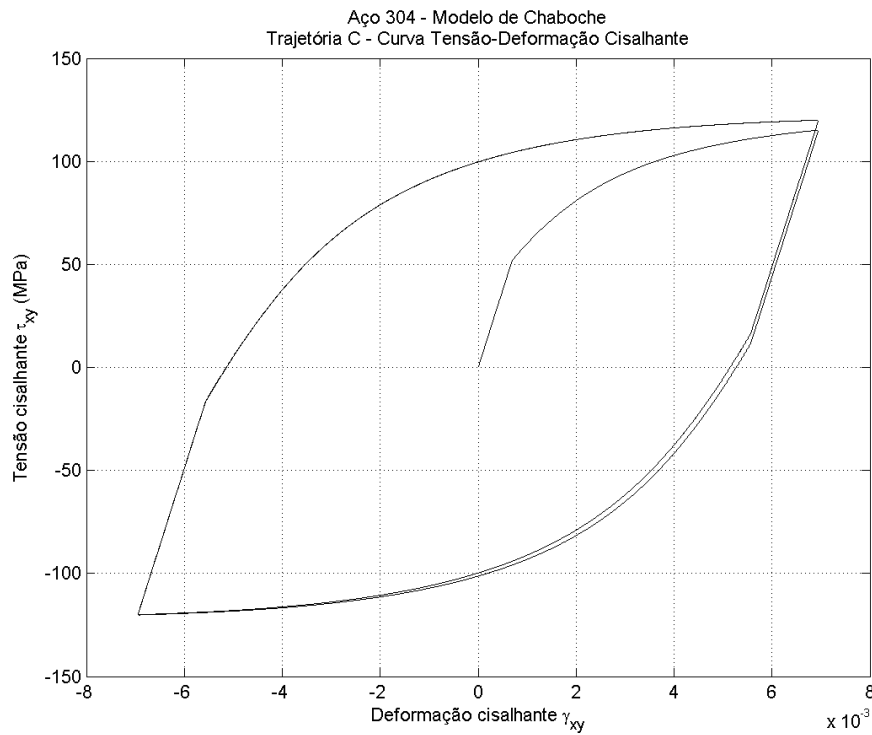


Figura 4.22 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

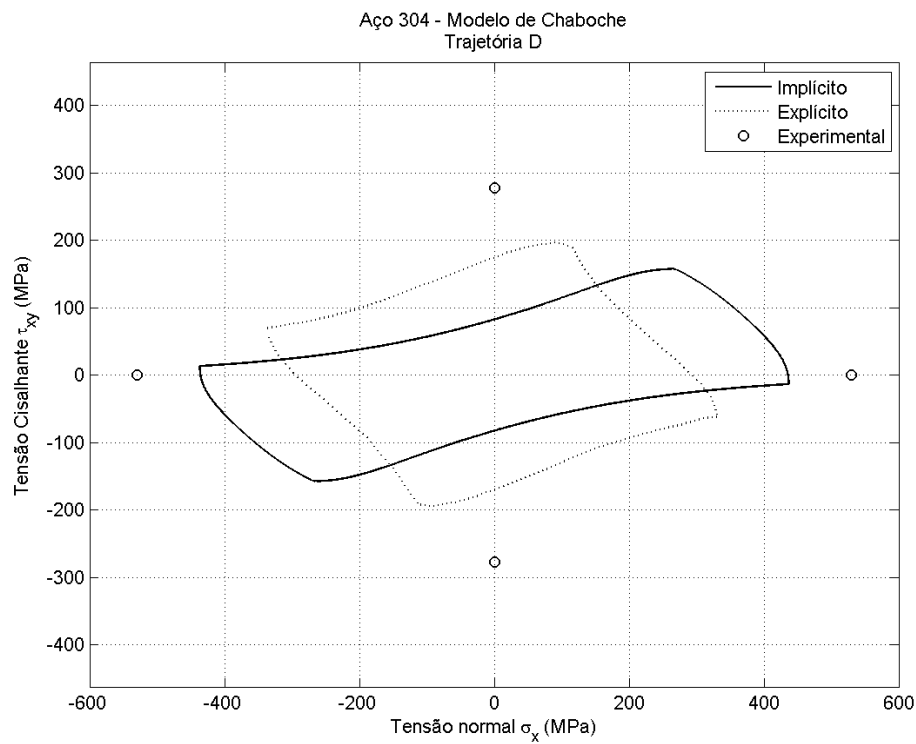


Figura 4.23 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

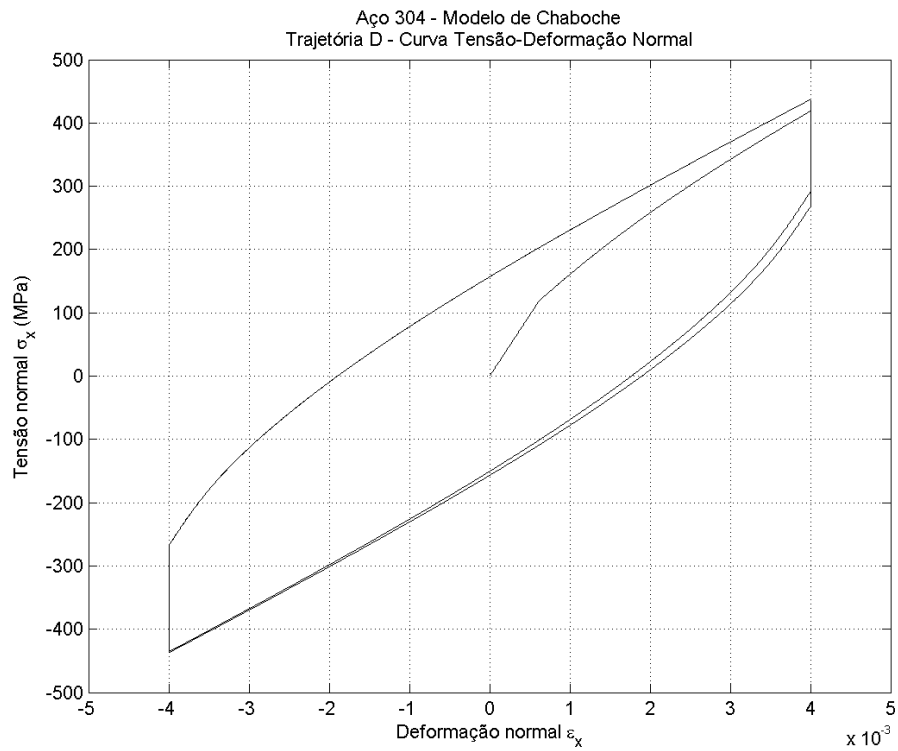


Figura 4.24 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

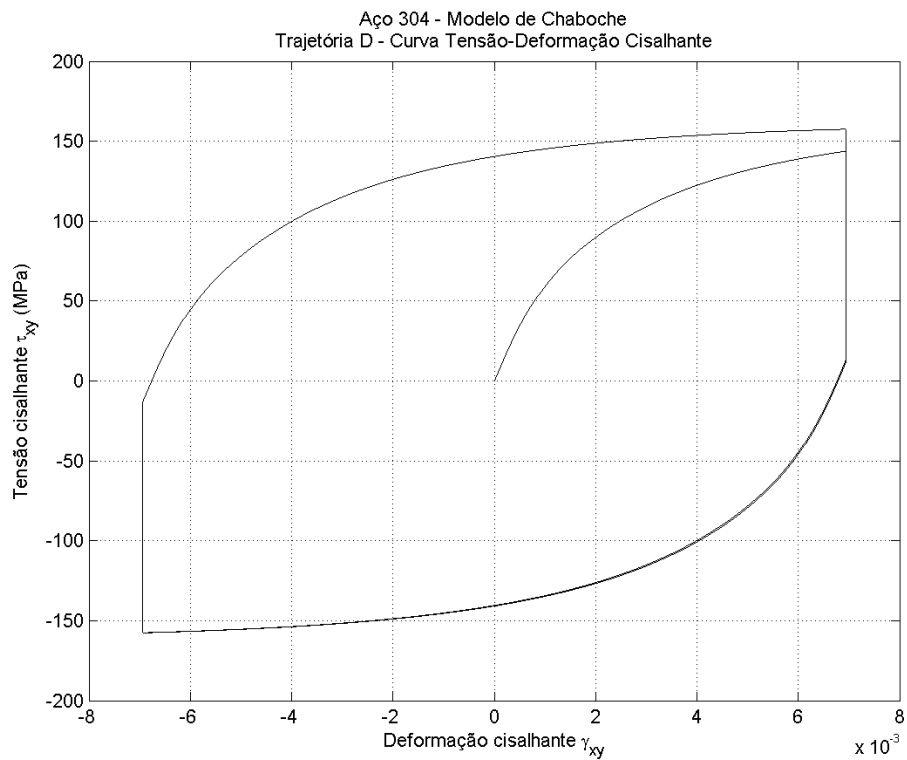


Figura 4.25 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$

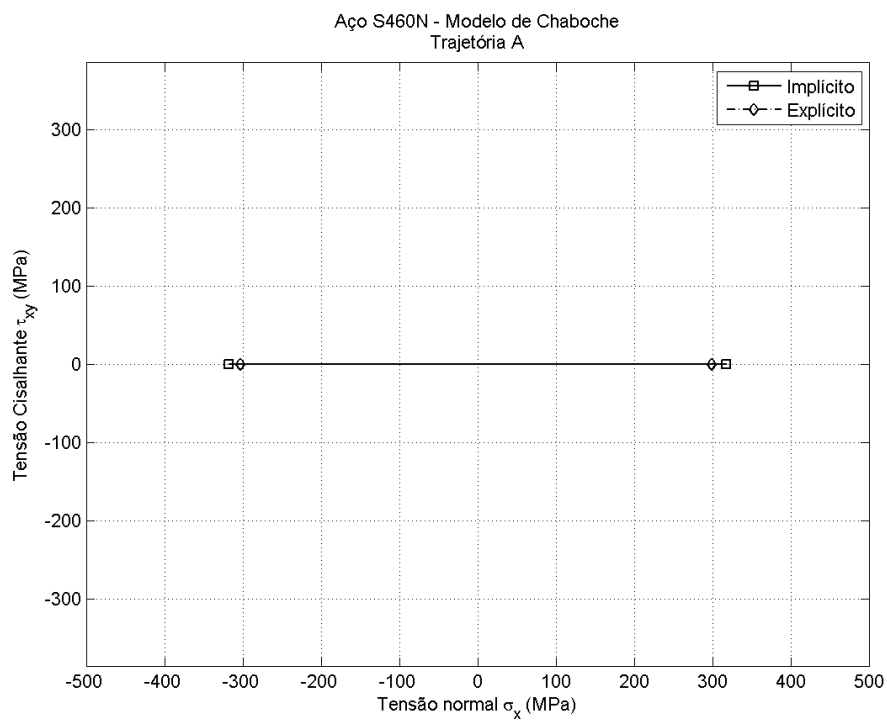


Figura 4.26 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

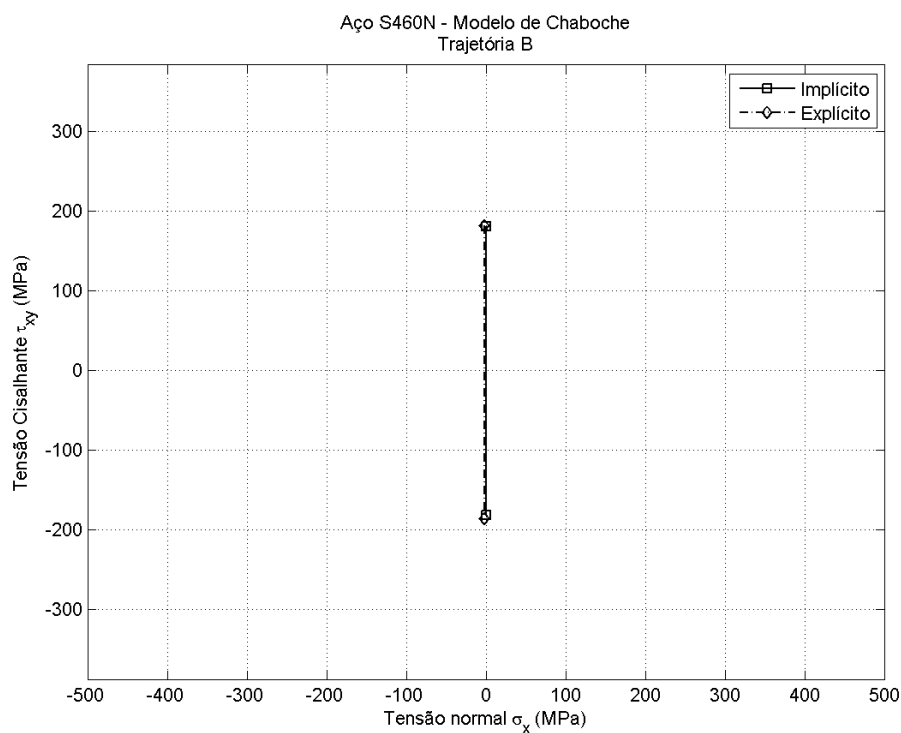


Figura 4.27 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos de Chaboche implícito e explícito (Pereira, 2014) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

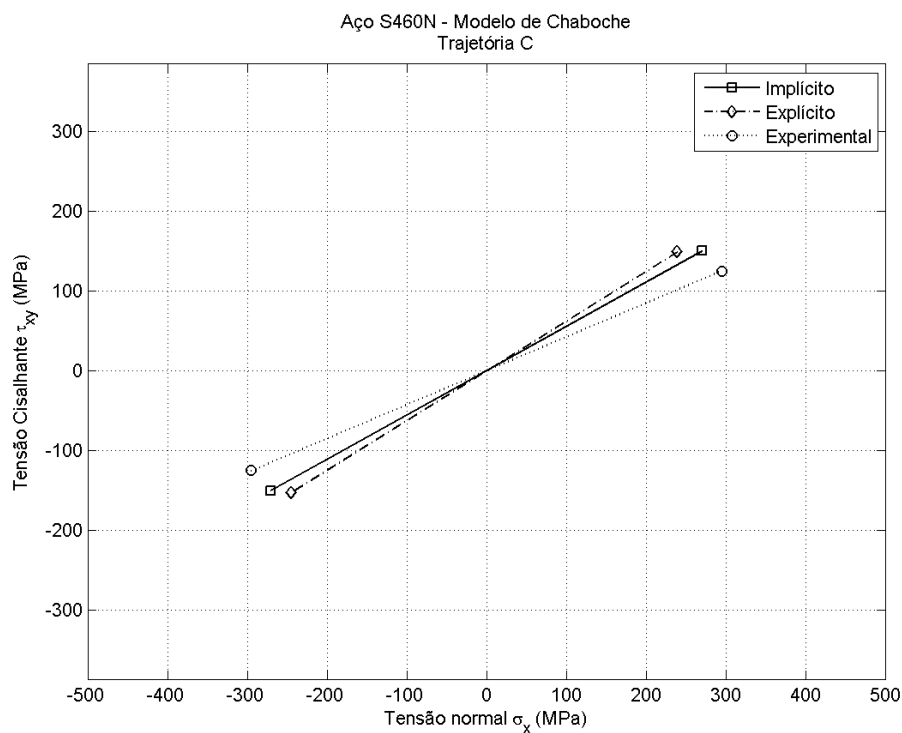


Figura 4.28 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

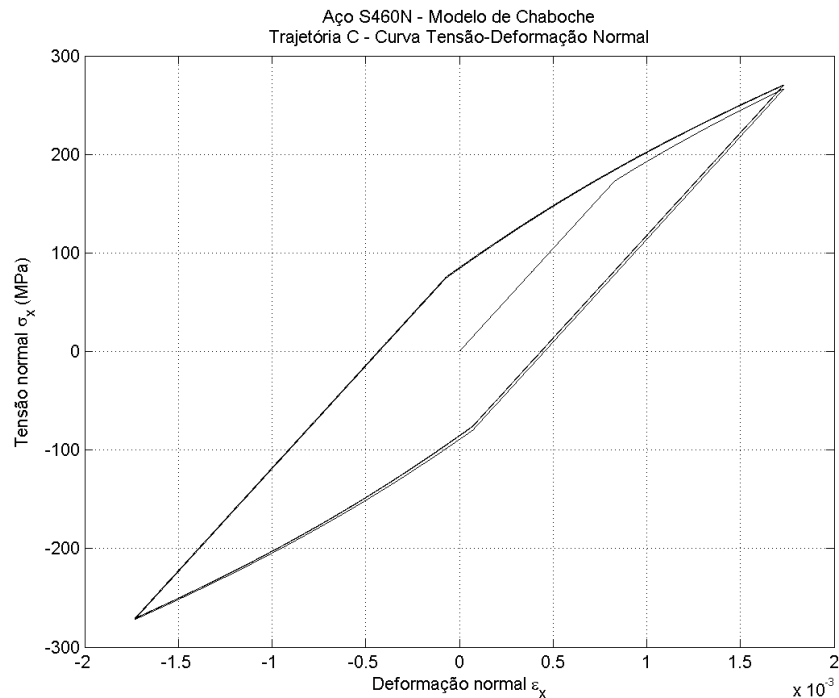


Figura 4.29 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

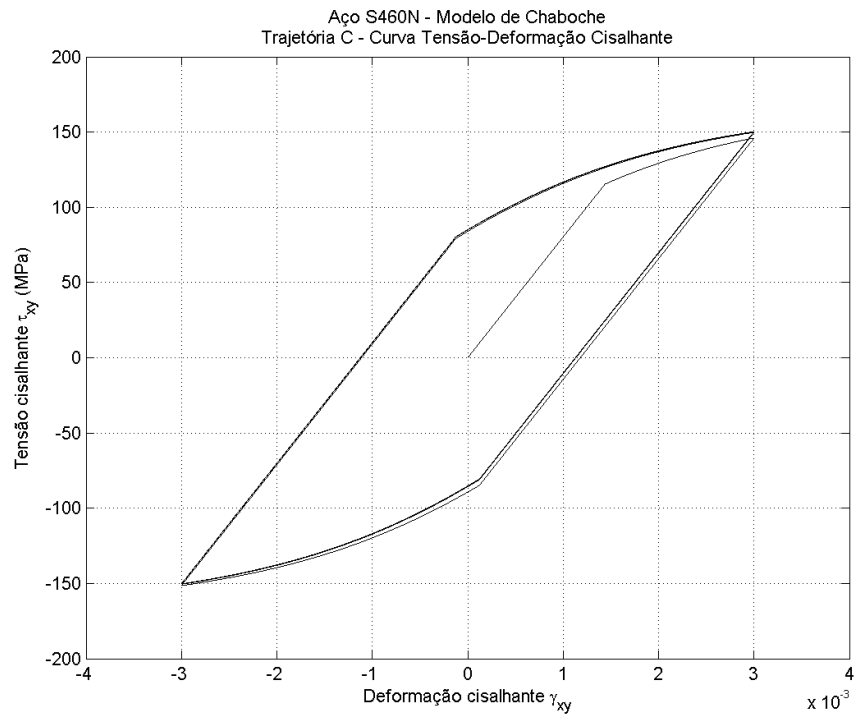


Figura 4.30 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

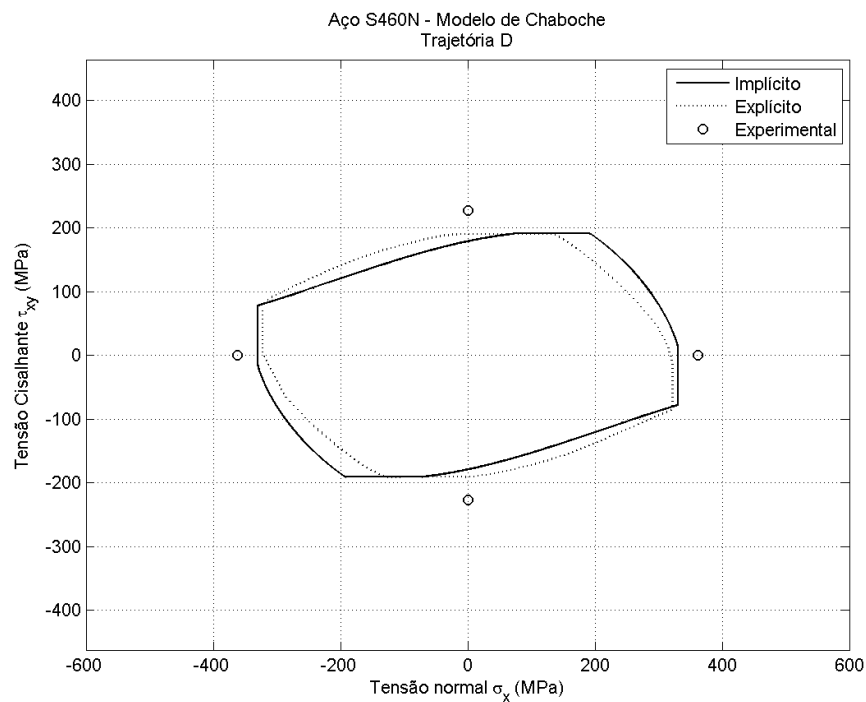


Figura 4.31 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados

experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

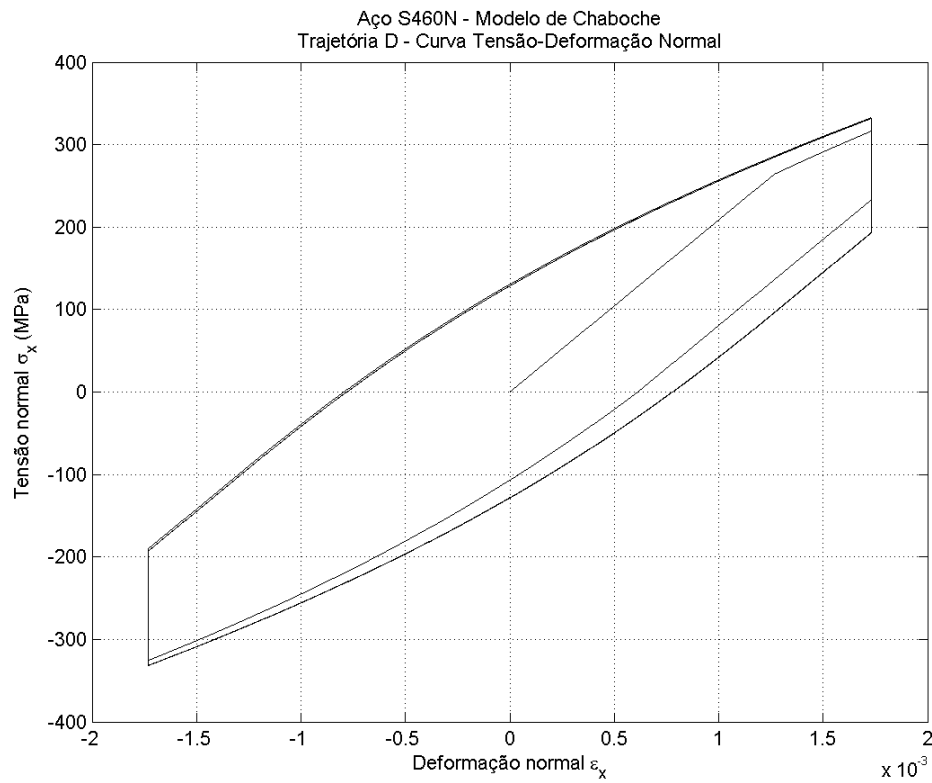


Figura 4.32 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

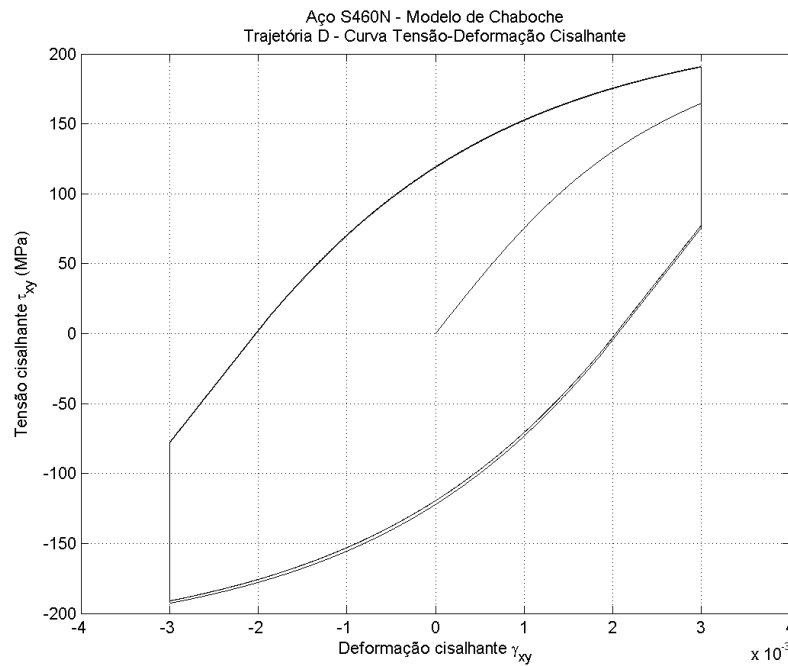


Figura 4.33 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

4.5 CARREGAMENTOS NÃO PROPORCIONAIS

Nesta seção, compara-se o modelo de Chaboche implícito aos resultados experimentais e explícitos (Pereira, 2014) em trajetórias não proporcionais, utilizando os aços 304, S460N e SAE 1045 HR. A Tabela 4.5 apresenta as deformações impostas e as amplitudes de tensão obtidas. As Figuras 4.34 a 4.36 apresentam os resultados para o aço 304, as Figs. 4.37 a 4.39 apresentam os resultados para o aço S460N, e as Figs. 4.40 a 4.42 apresentam os resultados para o aço 1045 HR.

Tabela 4.5 – Amplitudes de deformação prescritas e amplitudes de tensão experimental, implícita segundo o modelo de Chaboche e explícita para os aços 304, S460N e 1045 HR.

| Aço | | 304 (Itoh, 2001) | S460N (Jiang et al., 2007) | 1045 HR (Fatemi, 1998) |
|--------------|---------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------------|
| Trajetória | | Retangular | Elíptica | Retangular |
| Deformação | ε_a (%) | 0,4 | 0,404 | 0,13 |
| | γ_a (%) | 0,695 | 0,7 | 0,34 |
| Experimental | σ_a (MPa) | 530 | 480,9 | 286,8 |
| | τ_a (MPa) | 277,5 | 269,3 | 196,0 |
| Chaboche | σ_a (MPa) | 333,4 | 381,8 | 246,1 |
| Explícito | τ_a (MPa) | 196,7 | 225,2 | 169,5 |
| Chaboche | σ_a (MPa) | 437,0 | 456,0 | 249,4 |
| Implícito | τ_a (MPa) | 157,5 | 218,9 | 163,8 |

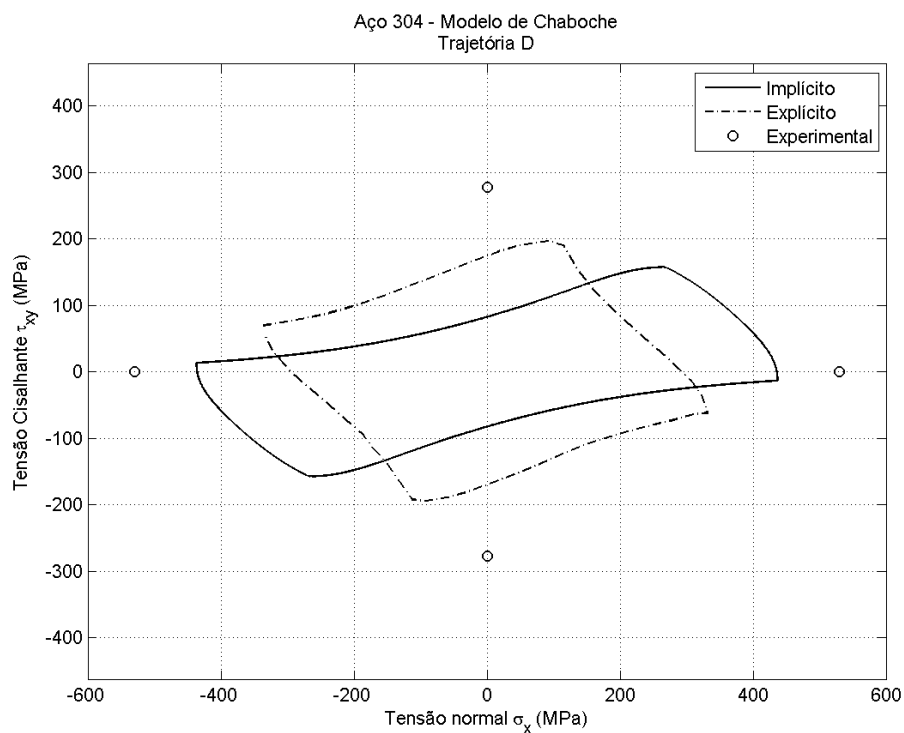


Figura 4.34 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

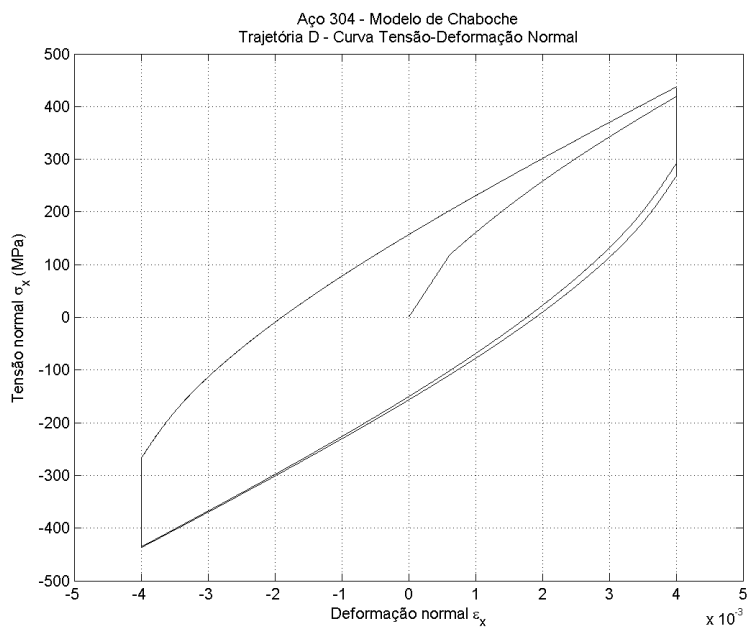


Figura 4.35 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

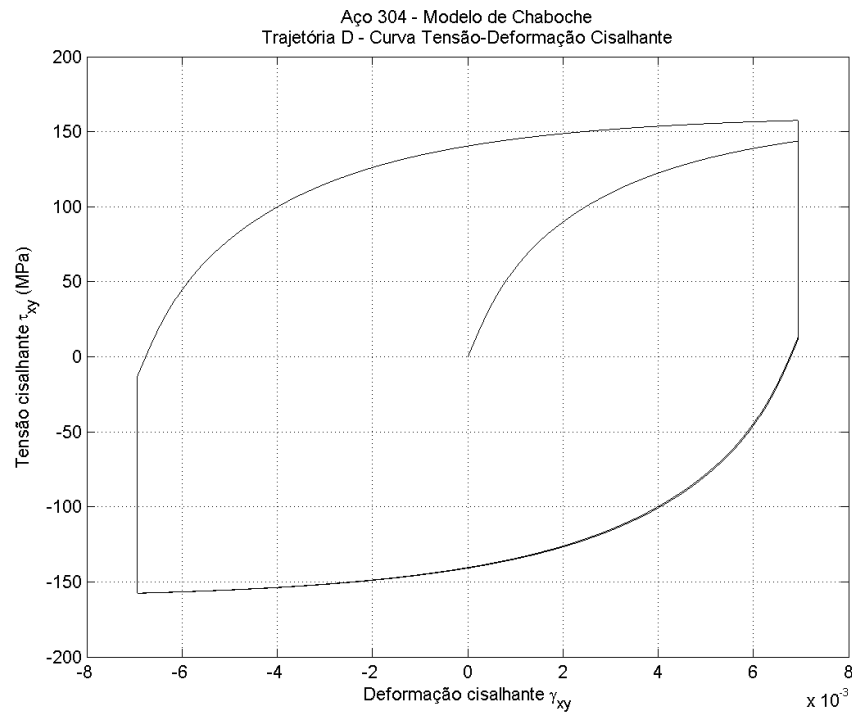


Figura 4.36 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

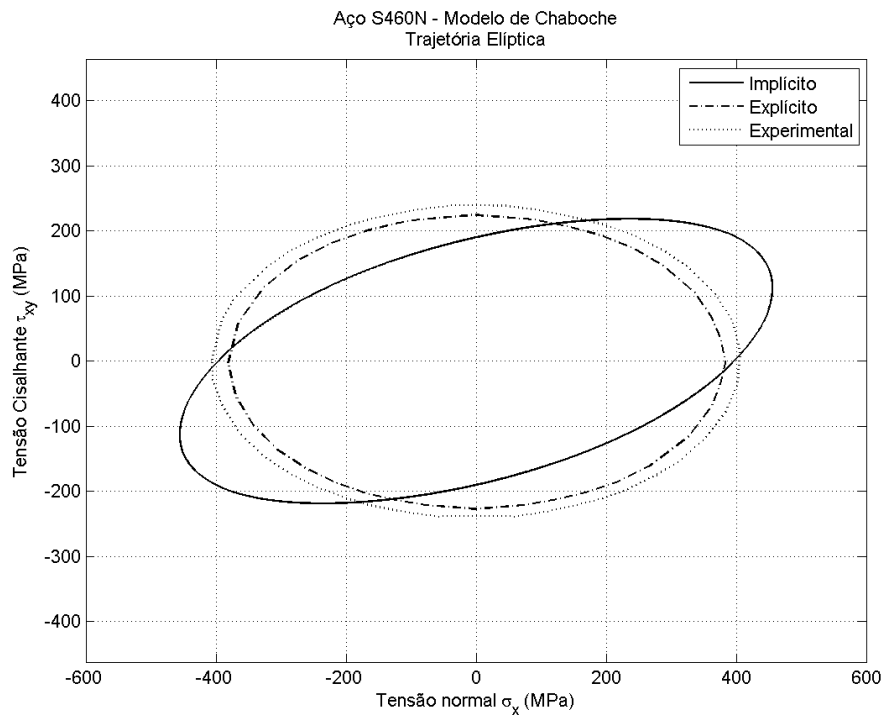


Figura 4.37 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados

experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404 \%$ e $\gamma_a = 0,7 \%$.

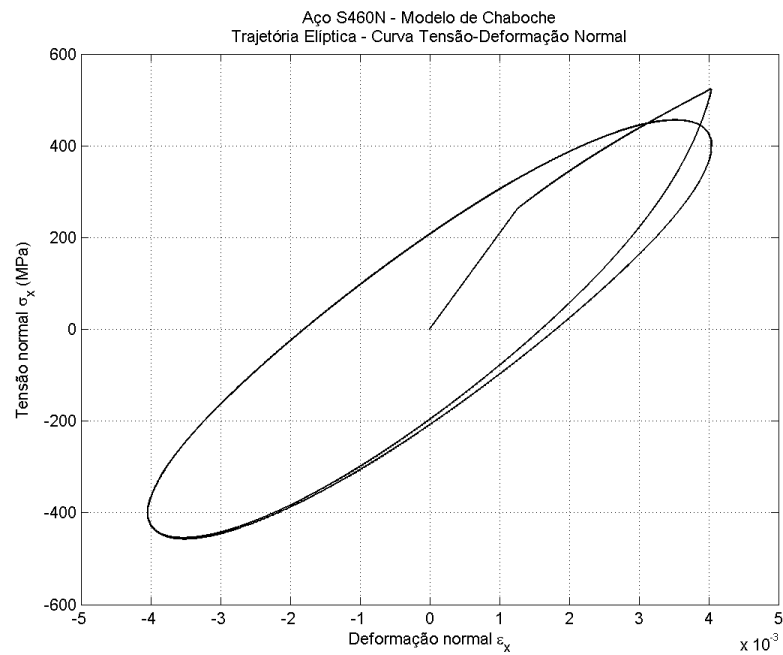


Figura 4.38 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404 \%$ e $\gamma_a = 0,7 \%$.

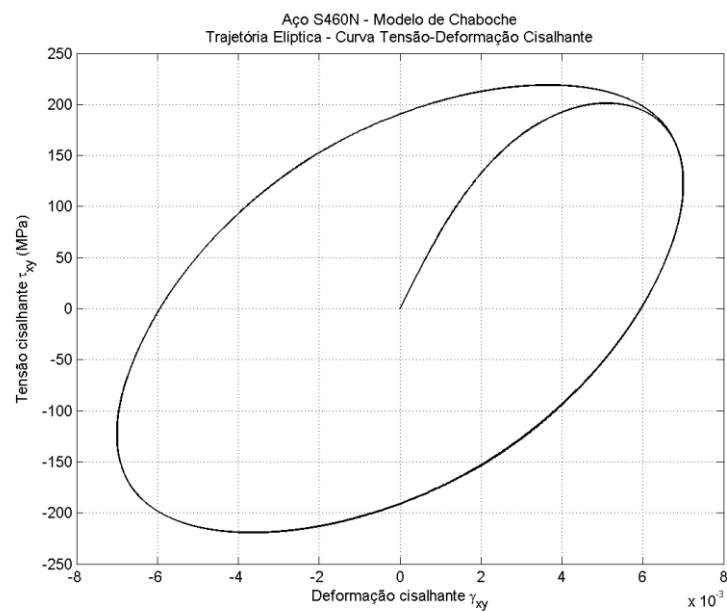


Figura 4.39 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória elíptica) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,404 \%$ e $\gamma_a = 0,7 \%$.

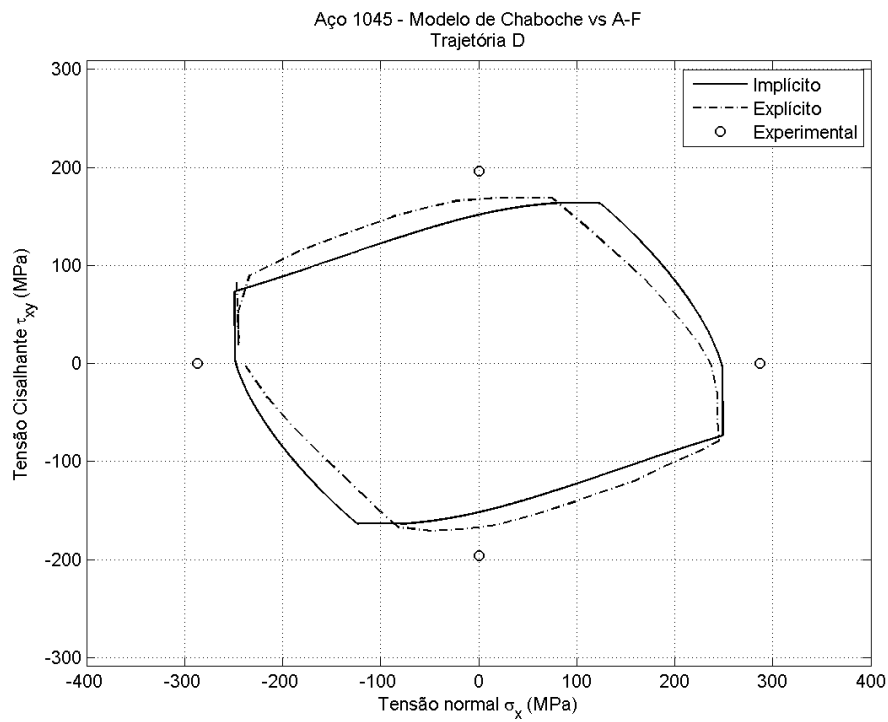


Figura 4.40 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para os modelos de Chaboche implícito, explícito (Pereira, 2014) e dados experimentais (FATEMI, 1998) para o aço SAE 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$.

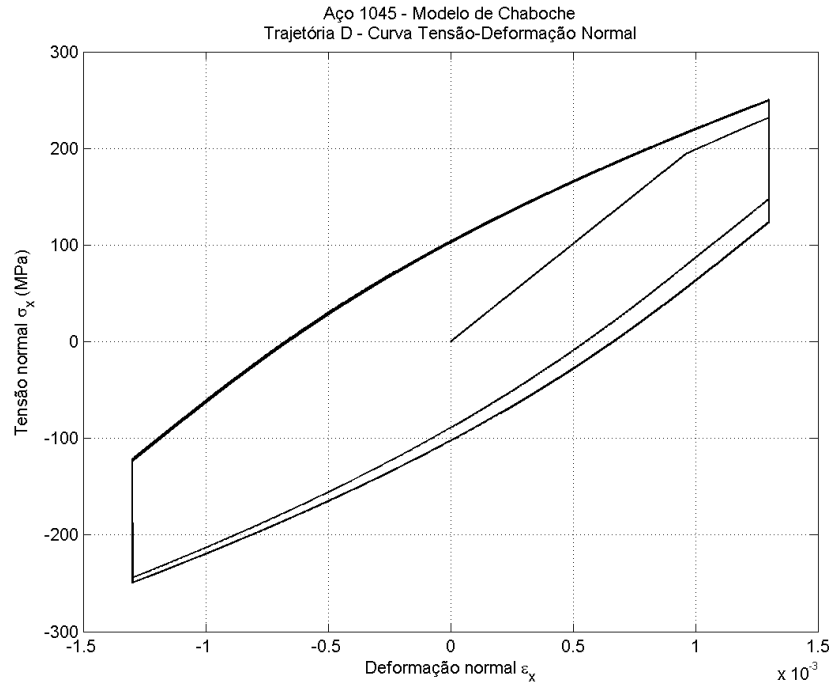


Figura 4.41 – Curva tensão-deformação normal da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$.

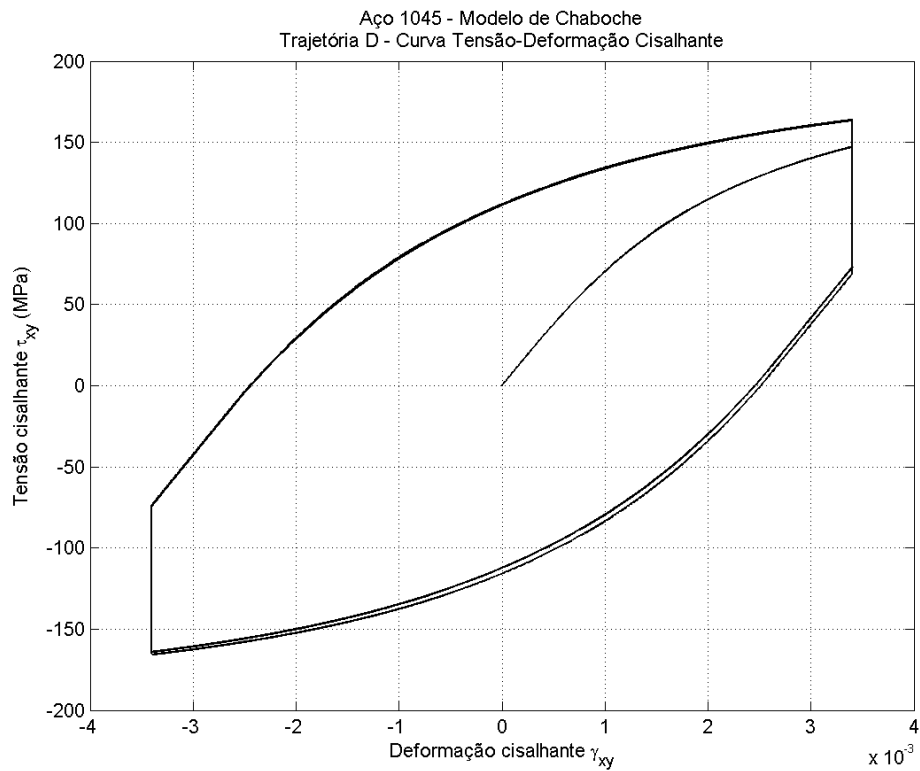


Figura 4.42 – Curva tensão-deformação cisalhante da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (trajetória retangular) para o modelo de Chaboche implícito, para o aço 1045 HR, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,13 \%$ e $\gamma_a = 0,34 \%$.

4.6 MODELO DE CHABOCHE VS MODELO DE A-F

Nesta seção é feita uma comparação entre o modelo de Chaboche com dois termos não lineares e três termos lineares e o modelo de Armstrong-Frederick, ambos obtidos pela estratégia implícita, e os dados experimentais. As Figuras 4.43 a 4.46 apresentam os resultados para o aço 304, enquanto que as Fig. 4.47 a 4.50 apresentam os resultados para o aço S460N.



Figura 4.43 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço 304, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

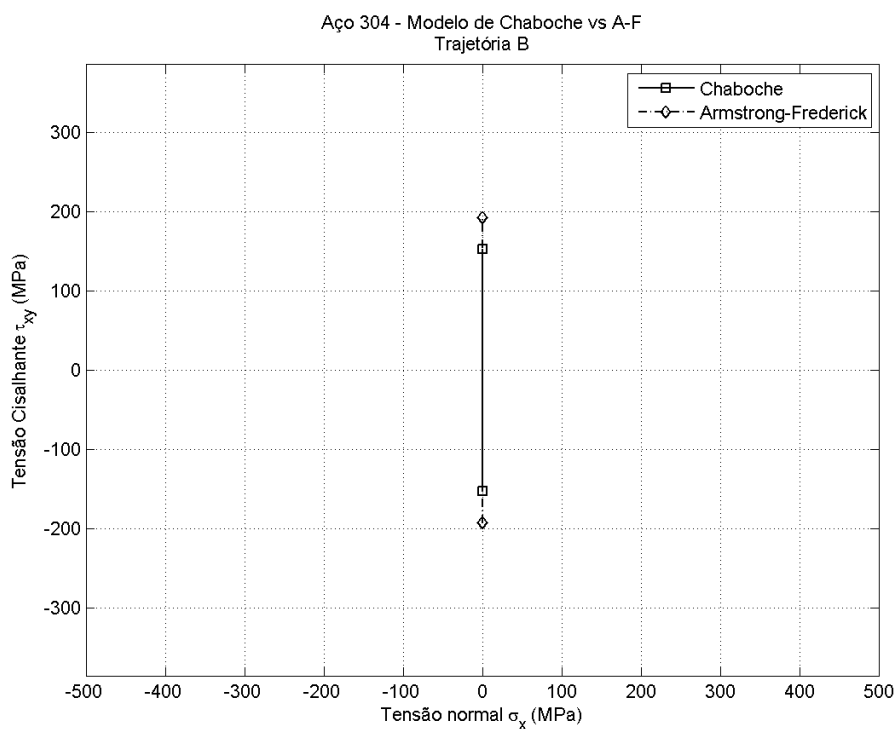


Figura 4.44 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

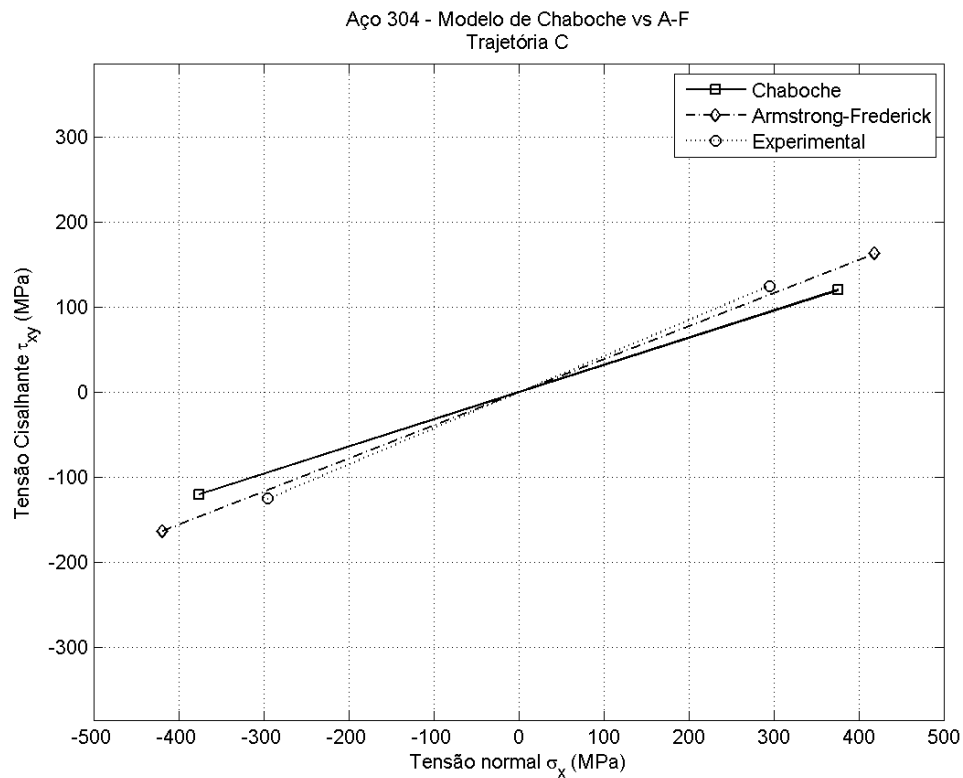


Figura 4.45 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

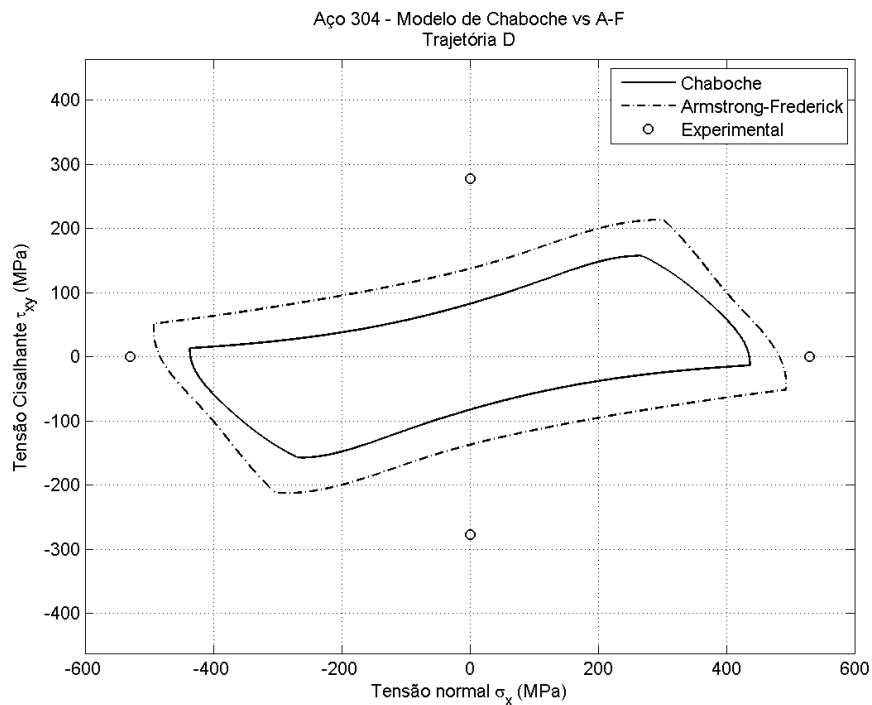


Figura 4.46 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial não proporcional (Trajetória D) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Itoh, 2001) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,4 \%$ e $\gamma_a = 0,695 \%$.

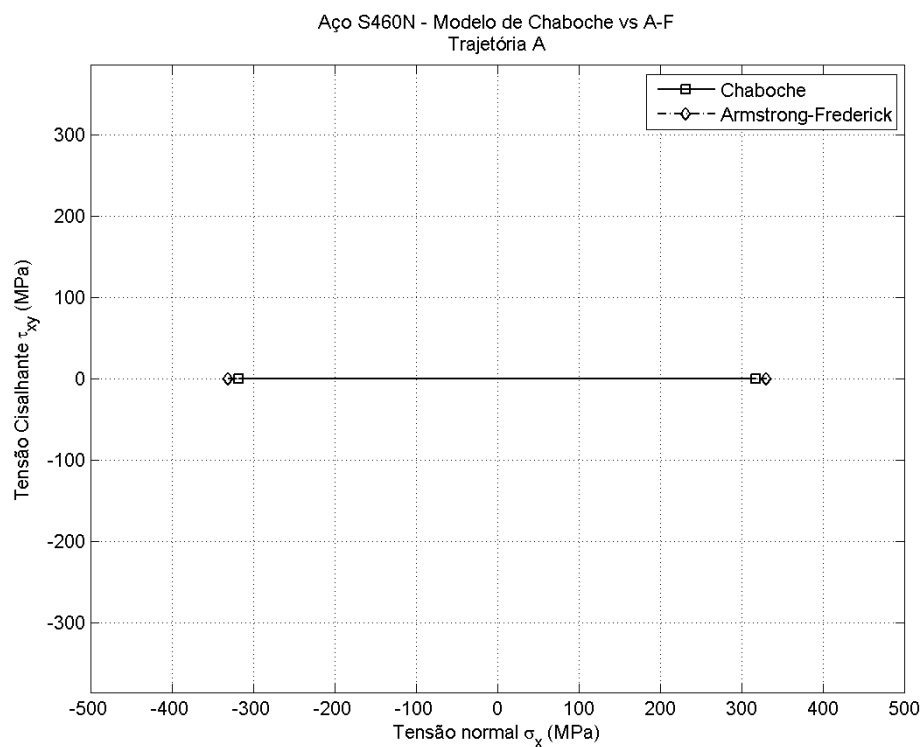


Figura 4.47 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de tração-compressão (Trajetória A) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0 \%$.

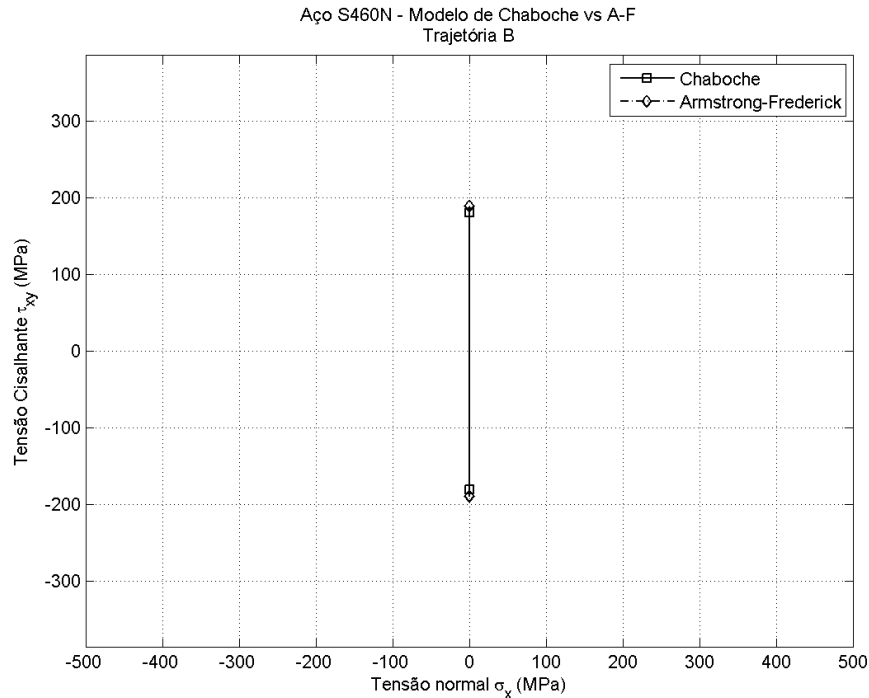


Figura 4.48 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento uniaxial de cisalhamento (Trajetória B) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

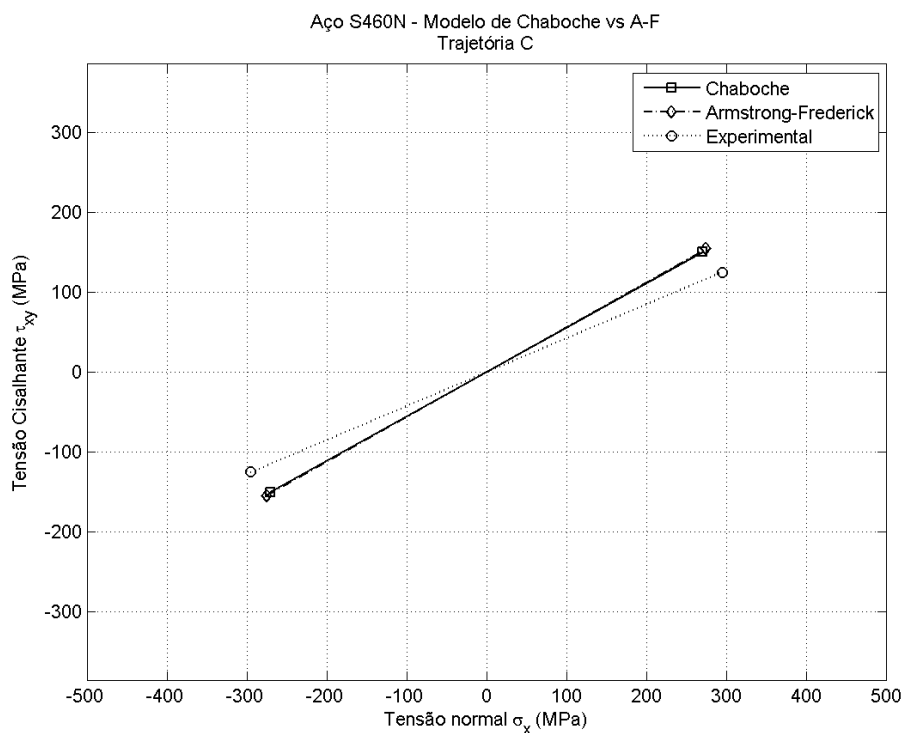


Figura 4.49 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória C) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0,173 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

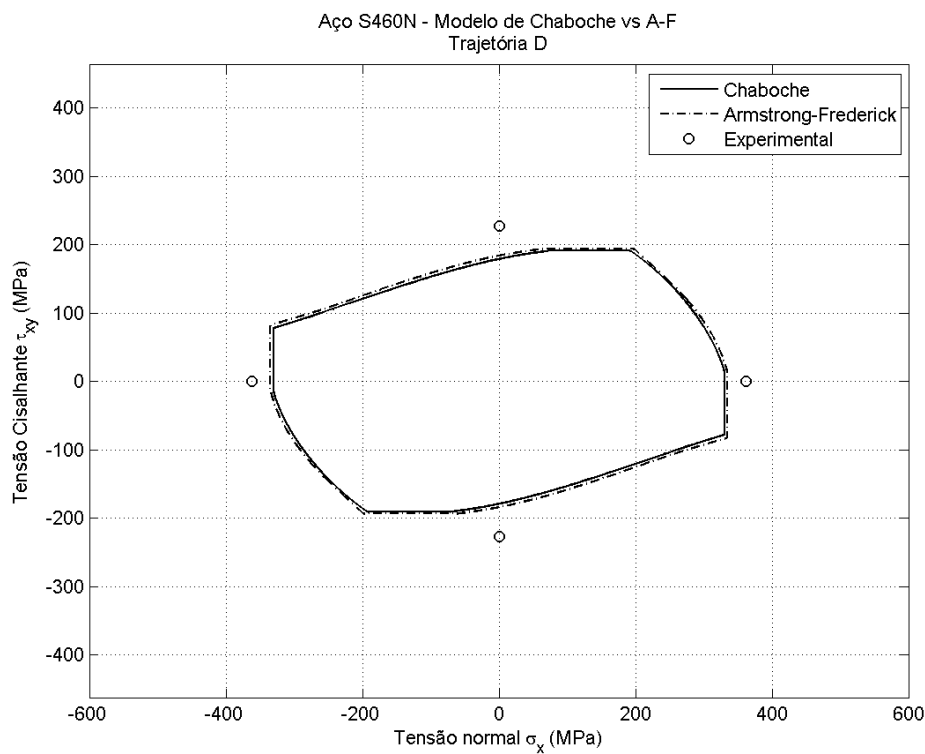


Figura 4.50 – Comparação das amplitudes de tensão resultantes da simulação de carregamento multiaxial proporcional (Trajetória D) para os modelos implícitos de Chaboche e Armstrong-Frederick e dados experimentais (Jiang et al., 2007) para o aço S460N, com amplitudes de deformação $\varepsilon_a = 0 \%$ e $\gamma_a = 0,3 \%$.

4.7 CONCLUSÕES

Observando os resultados, nota-se que a estratégia implícita apresentou resultados equivalentes à estratégia explícita, exceto para o aço 304. Essa divergência pode estar relacionada à calibração do modelo, principalmente ao limite de escoamento inicial.

Além disso, nota-se que o modelo de Chaboche descreve melhor o comportamento não proporcional que o modelo de Armstrong-Frederick, obtendo melhores resultados no aço 304. Para o aço S460N, por sua vez, os resultados dos dois modelos se sobrepuseram, devido principalmente à calibração ter obtido o mesmo valor de limite de escoamento inicial para os dois modelos.

Finalmente, nota-se que os resultados obtidos para a estratégia implícita ainda são distantes das tendências experimentais, principalmente em carregamentos não proporcionais, devido à pouca sensibilidade do modelo de Chaboche ao encruamento não proporcional.

5 TRABALHOS FUTUROS

Possíveis trabalhos futuros envolvem a aquisição de resultados que possam descrever melhor o comportamento não proporcional dos materiais. Assim, a investigação dos efeitos da calibração nos resultados obtidos pode ser analisada. Para a calibração, é necessário identificar os parâmetros do material mantendo o limite de escoamento inicial. Ou seja, sugere-se recalibrar apenas os parâmetros de endurecimento cinemático (H_i^k e b_i).

Além disso, pode ser estudada a influência do número de passes por ciclo na qualidade dos resultados obtidos, diminuindo o número de passes, para que se justifique a utilização da estratégia implícita em detrimento da estratégia explícita.

Finalmente, um estudo da vida em fadiga pode ser conduzido com base na mecânica do dano contínuo, comparando dados experimentais disponíveis na literatura com uma variável de dano. Sugere-se, portanto, uma modificação do modelo de Chaboche, incluindo a função de escoamento de Lemaitre (1985).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARMSTRONG, P. J., FREDERICK, C. O. (1966). **A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect**. Report RD/B/N731, CEGB, Central Electricity Generating Board, Berkley, UK.
- CHABOCHE, J. L. (1986). **Time-independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity**.
- CHABOCHE, J. L. (1989). **Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity**.
- FATEMI, A.; SOCIE, D. F. (1988) **A Critical Plane Approach To Multiaxial Fatigue Damage Including Out-Of-Phase Loading**. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol 11, No. 3, pp. 149-165.
- ITOH, T. (2001) **Multiaxial Low Cycle Fatigue Life Prediction Under Non-Proportional Loading**. Memoirs of the Faculty of Engineering, Fukui University.
- JIANG, Y., HERTEL, O.; VORMWALD, M. (2007) **An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria**. International Journal of Fatigue, 29, 1490-1502.
- LEMAITRE, J. (1985) **A continuous damage mechanics model for ductile fracture**. Journal of Engineering Materials and Technology.
- LESSE, G. E.; MORROW, J. (1985) **Low Cycle Fatigue Properties Of A 1045 Steel In Torsion**. Multiaxial Fatigue. ASTM STP 853, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 482-496.
- PERREIRA, F. G. (2014) **Um estudo do parâmetro de Tanaka como medida do encruamento não proporcional, no contexto da plasticidade cíclica**. Dissertação de mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF. 122 p.
- PRAGER, W. (1955) **The theory of plasticity: a survey of recent achievements**. Proceedings, Institution of Mechanical Engineers, 169:41-57.
- RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. (1943) **Description of stress-strain curves by three parameters**. Technical Note no. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington – DC.
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D. E. ; OWEN, D. J. D. (2008) **Computational Methods for Plasticity**.

ANEXO I

```
! UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
! FACULDADE DE TECNOLOGIA
! DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

! ALGORITMO DE DETERMINAÇÃO DA MATRIZ TANGENTE CONSISTENTE
! PARA O MODELO DE Chaboche COM N=3

! L. MALCHER, J. LOPES, NOVEMBER, 2014

SUBROUTINE CTCHA3D(DGAMA , DMATX , EPFLAG , IPROPS , &
                  NTYPE , RPROPS , RSTAVA , STREST , &
                  NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES , &
                  NRSTAV)

IMPLICIT NONE

!=====
=====
!=====
=====

!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=11, KSTRE=6

!=====
=====
!=====
=====

!DATA DECLARATION
REAL(8) R0      /0.0D0/
REAL(8) RP5     /0.5D0/
REAL(8) R1      /1.0D0/
REAL(8) R2      /2.0D0/
REAL(8) R3      /3.0D0/
REAL(8) R4      /4.0D0/
REAL(8) R5      /5.0D0/
REAL(8) R27     /27.0D0/
REAL(8) R81     /81.0D0/
REAL(8) R243    /243.0D0/
REAL(8) R1458   /1458.0D0/

!=====
=====
```



```

!=====
=====
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NDDIM , NRPROPS , NIPROPS , NSTRES , NRSTAV
LOGICAL EPFLAG
REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROPS)      :: IPROPS

REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DMATX
REAL(8) , DIMENSION(NRPROPS)      :: RPROPS
REAL(8) , DIMENSION(NRSTAV)       :: RSTAVA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)       :: STREST
!=====
=====
!=====
=====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL ERROR

INTEGER I , J , NHARD , K , NBACK

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

REAL(8) EPBAR , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK , R2G , &
      R3G , P , SIGMAY , HSLOPE , DETS , NORMS , SEQ , XI , &
      ADBETA , BDBETA , CDBETA , DDBETA

REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: SOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: FOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DEVPRJ
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: STRES
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: SINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: PROSINVT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: BETA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DFOID
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: ALPHA
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDOTS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES)      :: DXI
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDSIT
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SITDS
REAL(8) , DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PROSITDS

```

```

REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: PRODSITDS
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: SDSINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DBETA
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DALPHA
REAL(8), DIMENSION(6,6) :: DALPHAB
REAL(8), DIMENSION(14+6+6,14+6+6) :: MATRIX
REAL(8), DIMENSION(14+6+6,14+6+6) :: MINVERSE
REAL(8), DIMENSION(14,14) :: MATRIX14
REAL(8), DIMENSION(14,14) :: MINVERSE14
REAL(8), DIMENSION(20,20) :: MATRIX20
REAL(8), DIMENSION(20,20) :: MINVERSE20
REAL(8), DIMENSION(NSTRES,NSTRES) :: DXIDBETA

REAL(8), DIMENSION(6) :: ETA
REAL(8), DIMENSION(6) :: ETAN
REAL(8), DIMENSION(6) :: BACK
REAL(8), DIMENSION(6) :: BACKN

!NBACK=2;
REAL(8), DIMENSION(3,6) :: BACKNI
REAL(8), DIMENSION(3,6) :: BACKI
REAL(8), DIMENSION(3) :: HKSLOPE
REAL(8), DIMENSION(3) :: BKIN

! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! *****
REAL(8), DIMENSION(6) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL(8), DIMENSION(6) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL(8) DC_ALPHA_SIGMA

! INITIALIZE LOCAL VARIABLES
ERROR=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; K=0

```

```

SOID=R0      ; FOID=R0      ; DEVPRJ=R0      ; EPBAR=R0      ; YOUNG=R0      ;
POISS=R0
SIGMAT=R0    ; SIGMAS=R0    ; GMODU=R0      ; BULK=R0      ; R2G=R0      ;
R3G=R0
P=R0         ; STRES=R0     ; SIGMAY=R0      ; HSLOPE=R0    ; DETS=R0      ;
NORMS=R0
SEQ=R0       ; XI=R0        ; SINVT=R0      ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0      ;
DFOID=R0
ALPHA=R0     ; ADBETA=R0    ; BDBETA=R0     ; CDBETA=R0    ; DDBETA=R0    ;
SDOTS=R0
DXI=R0       ; SITDSIT=R0   ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0     ; PROSITDS=R0 ;
DSITDS=R0
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0 ; DBETA=R0      ; DALPHA=R0    ; MINVERSE=R0 ;
DXIDBETA=R0
ETA=R0       ; ETAN=R0      ; BACK=R0       ; BACKN=R0     ; DALPHAB=R0   ;
BKIN=R0
BACKNI=R0    ; BACKI=R0     ; HKSLOPE=R0    ; BKIN=R0      ; MATRIX14=R0 ;
MINVERSE14=R0
MATRIX=R0    ; MATRIX20=R0 ; MINVERSE20=R0

```

```

! *****

```

```

! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO

```

```

! *****

```

```

SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0

```

```

!=====
====
!=====
====

```

```

EPBAR=RSTAVA (KSTRE+1)

```

```

! Set some material properties

```

```

YOUNG=RPROPS (2)

```

```

POISS=RPROPS (3)

```

```

NHARD=IPROPS (3)

```

```

!

```

```

NBACK=IPROPS (4)

```

```

!

```

```

SIGMAY=RPROPS (4)

```

```

!

```

```

HKSLOPE (1) =RPROPS (5)

```

```

BKIN (1) =RPROPS (6)

```

```

!

```

```

HKSLOPE (2) =RPROPS (7)

```

```

BKIN(2)=RPROPS(8)
!
HKSLOPE(3)=RPROPS(9)
BKIN(3)=RPROPS(10)
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU

P=(STREST(1)+STREST(2)+STREST(3))/R3
STRES(1)=STREST(1)-P
STRES(2)=STREST(2)-P
STRES(3)=STREST(3)-P
STRES(4)=STREST(4)
STRES(5)=STREST(5)
STRES(6)=STREST(6)
!
BACKI(1,1)=RSTAVA(NSTRES+1+1)
BACKI(1,2)=RSTAVA(NSTRES+1+2)
BACKI(1,3)=RSTAVA(NSTRES+1+3)
BACKI(1,4)=RSTAVA(NSTRES+1+4)
BACKI(1,5)=RSTAVA(NSTRES+1+5)
BACKI(1,6)=RSTAVA(NSTRES+1+6)
!
BACKI(2,1)=RSTAVA(NSTRES+1+7)
BACKI(2,2)=RSTAVA(NSTRES+1+8)
BACKI(2,3)=RSTAVA(NSTRES+1+9)
BACKI(2,4)=RSTAVA(NSTRES+1+10)
BACKI(2,5)=RSTAVA(NSTRES+1+11)
BACKI(2,6)=RSTAVA(NSTRES+1+12)
!
BACKI(3,1)=RSTAVA(NSTRES+1+13)
BACKI(3,2)=RSTAVA(NSTRES+1+14)
BACKI(3,3)=RSTAVA(NSTRES+1+15)
BACKI(3,4)=RSTAVA(NSTRES+1+16)
BACKI(3,5)=RSTAVA(NSTRES+1+17)
BACKI(3,6)=RSTAVA(NSTRES+1+18)
!
IF (EPFLAG) THEN
!     PLASTIC DOMAIN
!     INITIALIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR
FOID=R0

```

```

FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1
FOID(5,5)=R1
FOID(6,6)=R1
! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR
SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)
DFOID=R0
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
        DFOID(I,J)=FOID(I,J)-(R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)
    ENDDO
ENDDO

DFOID(4,4)=DFOID(4,4)*R2
DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2
P=(STREST(1)+STREST(2)+STREST(3))/R3
STRES(1)=STREST(1)-P
STRES(2)=STREST(2)-P
STRES(3)=STREST(3)-P
STRES(4)=STREST(4)
STRES(5)=STREST(5)
STRES(6)=STREST(6)
!
!
BACK=R0
DO I=1, NBACK
    DO J=1, NSTRES
        BACK(J)=BACK(J)+BACKI(I,J)
    ENDDO
ENDDO
!
ETA(1)=STRES(1)-BACK(1)
ETA(2)=STRES(2)-BACK(2)
ETA(3)=STRES(3)-BACK(3)
ETA(4)=STRES(4)-BACK(4)
ETA(5)=STRES(5)-BACK(5)

```

```

ETA (6)=STRES (6) -BACK (6)

!
NORMS=DSQRT (ETA (1) *ETA (1) +ETA (2) *ETA (2) +&
            ETA (3) *ETA (3) +R2*ETA (4) *ETA (4) +&
            R2*ETA (5) *ETA (5) +R2*ETA (6) *ETA (6) )

SEQ=DSQRT (R3/R2) *NORMS

! COMPUTE ALPHA
DO I=1,NSTRES
    ALPHA (I) =DSQRT (R3/R2) *ETA (I) /NORMS
ENDDO

SIGMA=STRES
SIGMA (1) =SIGMA (1) +P
SIGMA (2) =SIGMA (2) +P
SIGMA (3) =SIGMA (3) +P

! =====
=====
! =====
=====
! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES
! =====
=====
! =====
=====
! *****
! COMPUTE S \OTIMES S
! *****
SDOTS=R0
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
        IF (J.GE.4) THEN
            SDOTS (I,J) =R2*ETA (I) *ETA (J)
        ELSE
            SDOTS (I,J) =ETA (I) *ETA (J)
        ENDIF
    ENDDO
ENDDO

! =====
! COMPUTE DALPHA
! =====
DALPHA=R0
DALPHAB=R0
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES

```

```

DALPHA (I, J) =DSQRT (R3/R2) *FOID (I, J) /NORMS-&
DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

DALPHAB (I, J) =-DSQRT (R3/2) *FOID (I, J) /NORMS+&
DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I, J) / (NORMS**R3)

ENDDO

ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX=R0
DO I=1, NSTRES
    DO J=1, NSTRES
        MATRIX (I, J) =FOID (I, J) +R2G*DGAMA*DALPHA (I, J)
    ENDDO
ENDDO

!
MATRIX (1, 7) =R0
MATRIX (2, 7) =R0
MATRIX (3, 7) =R0
MATRIX (4, 7) =R0
MATRIX (5, 7) =R0
MATRIX (6, 7) =R0
!
MATRIX (1, 8) =R2G*ALPHA (1)
MATRIX (2, 8) =R2G*ALPHA (2)
MATRIX (3, 8) =R2G*ALPHA (3)
MATRIX (4, 8) =R2G*ALPHA (4)
MATRIX (5, 8) =R2G*ALPHA (5)
MATRIX (6, 8) =R2G*ALPHA (6)

DO I=1, NSTRES
    DO J=1, NSTRES
        MATRIX (I, J+8) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J)  !BETA 1
        MATRIX (I, J+14) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J)  !BETA 2
        MATRIX (I, J+20) =R2G*DGAMA*DALPHAB (I, J)  !BETA 3
    ENDDO
ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

```

```

MATRIX(7,1)=R0
MATRIX(7,2)=R0
MATRIX(7,3)=R0
MATRIX(7,4)=R0
MATRIX(7,5)=R0
MATRIX(7,6)=R0
!
MATRIX(7,7)=R1
!
MATRIX(7,8)=-R1
!BETA 1
MATRIX(7,9)=R0
MATRIX(7,10)=R0
MATRIX(7,11)=R0
MATRIX(7,12)=R0
MATRIX(7,13)=R0
MATRIX(7,14)=R0
!BETA 2
MATRIX(7,15)=R0
MATRIX(7,16)=R0
MATRIX(7,17)=R0
MATRIX(7,18)=R0
MATRIX(7,19)=R0
MATRIX(7,20)=R0
!BETA 3
MATRIX(7,21)=R0
MATRIX(7,22)=R0
MATRIX(7,23)=R0
MATRIX(7,24)=R0
MATRIX(7,25)=R0
MATRIX(7,26)=R0
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
MATRIX(8,1)=DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,2)=DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,3)=DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,4)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,5)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,6)=R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!
MATRIX(8,7)=R0
MATRIX(8,8)=R0

```



```

!BETA 1
MATRIX(8,9)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,10)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,11)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,12)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,13)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,14)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!BETA 2
MATRIX(8,15)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,16)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,17)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,18)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,19)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,20)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!BETA 3
MATRIX(8,21)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,22)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,23)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,24)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,25)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,26)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
        MATRIX(I+8,J)=- (R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHA(I,J)
!BETA 1
        MATRIX(I+14,J)=- (R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHA(I,J)
!BETA 2
        MATRIX(I+20,J)=- (R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHA(I,J)
!BETA 3
    ENDDO
ENDDO
! BETA 1
MATRIX(9,7)=R0
MATRIX(10,7)=R0
MATRIX(11,7)=R0
MATRIX(12,7)=R0
MATRIX(13,7)=R0
MATRIX(14,7)=R0
! BETA2

```

```

MATRIX(15,7)=R0
MATRIX(16,7)=R0
MATRIX(17,7)=R0
MATRIX(18,7)=R0
MATRIX(19,7)=R0
MATRIX(20,7)=R0
! BETA 3
MATRIX(21,7)=R0
MATRIX(22,7)=R0
MATRIX(23,7)=R0
MATRIX(24,7)=R0
MATRIX(25,7)=R0
MATRIX(26,7)=R0
!
DO I=1,NSTRES
    MATRIX(I+8,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *ALPHA(I) +BKIN(1) *BACKI(1,I)
!BETA 1
    MATRIX(I+14,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(2) *ALPHA(I) +BKIN(2) *BACKI(2,I)
!BETA 2
    MATRIX(I+20,8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(3) *ALPHA(I) +BKIN(3) *BACKI(3,I)
!BETA 3
ENDDO
!
DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
        MATRIX(I+8,J+8)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA*DALPHAB(I,J) +DGAMA*BKIN(1) *FOID(I,J) !BETA 1
        MATRIX(I+8,J+14)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 1
        MATRIX(I+8,J+20)=- (R2/R3) *HKSLOPE(1) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 1
        MATRIX(I+14,J+8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 2
        MATRIX(I+14,J+14)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA*DALPHAB(I,J) +DGAMA*BKIN(2) *FOID(I,J) !BETA 2
        MATRIX(I+14,J+20)=- (R2/R3) *HKSLOPE(2) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 2
        MATRIX(I+20,J+8)=- (R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 3
        MATRIX(I+20,J+14)=- (R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA*DALPHAB(I,J)
!BETA 3
        MATRIX(I+20,J+20)=FOID(I,J) -
(R2/R3) *HKSLOPE(3) *DGAMA*DALPHAB(I,J) +DGAMA*BKIN(3) *FOID(I,J) !BETA 3
    
```

```

        ENDDO
    ENDDO
    ! INVERSE MATRIX
    IF (NBACK.EQ.1) THEN
        MATRIX14=R0
        DO I=1,14
            DO J=1,14
                MATRIX14(I,J)=MATRIX(I,J)
            ENDDO
        ENDDO
        CALL RMINVE (MATRIX14 , MINVERSE14 , 14 , ERROR)
    ENDIF
    IF (NBACK.EQ.2) THEN
        MATRIX20=R0
        DO I=1,20
            DO J=1,20
                MATRIX20(I,J)=MATRIX(I,J)
            ENDDO
        ENDDO
        CALL RMINVE (MATRIX20 , MINVERSE20 , 20 , ERROR)
    ENDIF
    IF (NBACK.EQ.3) THEN
        CALL RMINVE (MATRIX , MINVERSE , 26 , ERROR)
    ENDIF
    !
    DMATX=R0
    DO I=1,NSTRES
        DO J=1,NSTRES
            DO K=1,NSTRES
                IF (NBACK.EQ.1) THEN
                    DMATX(I,J)=DMATX(I,J)+MINVERSE14(I,K)*DFOID(K,J)
                ELSEIF (NBACK.EQ.2) THEN
                    DMATX(I,J)=DMATX(I,J)+MINVERSE20(I,K)*DFOID(K,J)
                ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
                    DMATX(I,J)=DMATX(I,J)+MINVERSE(I,K)*DFOID(K,J)
                ENDIF
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO
    DO I=1,NSTRES
        DO J=1,NSTRES

```

```

DMATX(I,J)=R2G*DMATX(I,J)

ENDDO

ENDDO

!      dmatx(1,1)=r0
!
!      dmatx(1,1)=minverse(1,1)*dfoid(1,1)+minverse(1,2)*dfoid(2,1)+minverse
(1,3)*dfoid(3,1)+&
!
r2*minverse(1,4)*dfoid(4,1)+r2*minverse(1,5)*dfoid(5,1)+r2*minverse(1,6)*df
oid(6,1)
!      dmatx(1,1)=r2g*dmatx(1,1)

! COLUMN 1 - XX
DMATX(1,1)=DMATX(1,1)+BULK
DMATX(2,1)=DMATX(2,1)+BULK
DMATX(3,1)=DMATX(3,1)+BULK
! COLUMN 2 - YY
DMATX(1,2)=DMATX(1,2)+BULK
DMATX(2,2)=DMATX(2,2)+BULK
DMATX(3,2)=DMATX(3,2)+BULK
! COLUMN 3 - ZZ
DMATX(1,3)=DMATX(1,3)+BULK
DMATX(2,3)=DMATX(2,3)+BULK
DMATX(3,3)=DMATX(3,3)+BULK
! COLUMN 4 - XY
DMATX(1,4)=DMATX(1,4)/R4
DMATX(2,4)=DMATX(2,4)/R4
DMATX(3,4)=DMATX(3,4)/R4
DMATX(4,4)=DMATX(4,4)/R4
DMATX(5,4)=DMATX(5,4)/R4
DMATX(6,4)=DMATX(6,4)/R4
! COLUMN 5 - YZ
DMATX(1,5)=DMATX(1,5)/R4
DMATX(2,5)=DMATX(2,5)/R4
DMATX(3,5)=DMATX(3,5)/R4
DMATX(4,5)=DMATX(4,5)/R4
DMATX(5,5)=DMATX(5,5)/R4
DMATX(6,5)=DMATX(6,5)/R4
! COLUMN 5 - XZ
DMATX(1,6)=DMATX(1,6)/R4
DMATX(2,6)=DMATX(2,6)/R4
DMATX(3,6)=DMATX(3,6)/R4

```

```

DMATX(4,6)=DMATX(4,6)/R4
DMATX(5,6)=DMATX(5,6)/R4
DMATX(6,6)=DMATX(6,6)/R4

ELSE
  ! ELASTIC DOMAIN
  FOID(1,1)=R1
  FOID(2,2)=R1
  FOID(3,3)=R1
  FOID(4,4)=RP5
  FOID(5,5)=RP5
  FOID(6,6)=RP5
  SOID(1)=R1
  SOID(2)=R1
  SOID(3)=R1
  DO I=1,NSTRES
    DO J=1,NSTRES
      DEVPRJ(I,J)=FOID(I,J)-SOID(I)*SOID(J)*(R1/R3)
    ENDDO
  ENDDO
  DO I=1,NSTRES
    DO J=I,NSTRES
      DMATX(I,J)=R2G*DEVPRJ(I,J)+BULK*SOID(I)*SOID(J)
    ENDDO
  ENDDO
  ! Assemble lower triangle
  ! -----
  DO J=1,NSTRES-1
    DO I=J+1,NSTRES
      DMATX(I,J)=DMATX(J,I)
    ENDDO
  ENDDO
ENDIF
RETURN
END

```

```

! UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
! FACULDADE DE TECNOLOGIA
! DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

! ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO IMPLÍCITA PARA O MODELO
! DE PLASTICIDADE CÍCLICA DE Chaboche COM N=3

! L. MALCHER, J. LOPES, NOVEMBER, 2014

! BEGIN_SUBROUTINE SUCHA
! State update procedure for the Chaboche kinematic model.

SUBROUTINE SUCHA3D(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS , RSTAVA ,
STRAN , &
                STRES , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV)
IMPLICIT NONE

!=====
====
!=====
====

!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=11, KSTRE=6

!=====
====

!=====
====

!DATA DECLARATION
REAL(8) R0      /0.0D0/
REAL(8) RP5     /0.5D0/
REAL(8) R1      /1.0D0/
REAL(8) R2      /2.0D0/
REAL(8) R3      /3.0D0/
REAL(8) R4      /4.0D0/
REAL(8) R5      /5.0D0/
REAL(8) R27     /27.0D0/
REAL(8) R81     /81.0D0/
REAL(8) R243    /243.0D0/
REAL(8) R1458   /1458.0D0/
REAL(8) TOL     /1.D-06/
INTEGER MXITER  /50/

!=====
====

```

```

!=====
=====
! DECLARATION OF ARGUMENTS
INTEGER NTYPE , NRPROP , NIPROP , NRSTAV , NSTRA , NSTRE , NLALGV

REAL(8) DGAMA

INTEGER, DIMENSION(NIPROP) :: IPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRPROP) :: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA) :: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: STRES
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV) :: LALGVA

!=====
=====
!=====
=====
! DECLARATION OF LOCAL VARIABLES
LOGICAL IFPLAS , SUFAIL

INTEGER I , J , NHARD , IITER , K , NBACK

REAL(8) EPBARN , YOUNG , POISS , SIGMAT , SIGMAS , GMODU , BULK , R2G
, R3G , &
EEV , P , EEVD3 , VARJ2T , QTRIAL , DETS , SIGMAY , XI
, PHI , &
EPBAR , HSLOPE , NORMS , SEQ , EQ2 , ADBETA , BDBETA , CDBETA
, DDBETA , &
RESNOR , EQ3

REAL(8) PLFUN , DPLFUN

! FOURTH ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: FOID
! SECOND ORDER IDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: SOID
! DEVIATORIC INDENTITY TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE,NSTRE) :: DFOID
! DEVIATORIC STRAIN TENSOR
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: EET, ETA, ETAN, BACKN, BACK
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: STRIAL
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: SINVT
REAL(8), DIMENSION(NSTRE) :: PROSINVT

```

```

REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: BETA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: ALPHA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: EQ1
REAL (8) , DIMENSION (6+6+6)      :: EQ4
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SDOTS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE)      :: DXI
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SITDSIT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PROSITDSIT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PROSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: PRODSITDS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: SDSINVT
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DBETA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DALPHA
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DALPHAB
REAL (8) , DIMENSION (14+6+6,14+6+6) :: MATRIX , INVMATRIX
REAL (8) , DIMENSION (14,14) :: MATRIX14 , INVMATRIX14
REAL (8) , DIMENSION (20,20) :: MATRIX20 , INVMATRIX20
REAL (8) , DIMENSION (14+6+6)      :: RHS , RES
REAL (8) , DIMENSION (14)          :: RHS14 , RES14
REAL (8) , DIMENSION (20)          :: RHS20 , RES20
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE,NSTRE) :: DXIDBETA
REAL (8) , DIMENSION (3,NSTRE)     :: BACKNI
REAL (8) , DIMENSION (3,NSTRE)     :: BACKI
REAL (8) , DIMENSION (3)           :: HKSLOPE
REAL (8) , DIMENSION (3)           :: BKIN
! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! *****
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE) :: SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE DALPHA E O TENSOR DAS TENSÕES
! GLOBAIS
REAL (8) , DIMENSION (NSTRE) :: DC_DALPHA_SIGMA
! DUPLA CONTRACÇÃO ENTRE ALPHA E SIGMA
REAL (8) DC_ALPHA_SIGMA
! =====
=====
! =====
=====
! INITIALIZE LOCAL VARIABLES
IFPLAS=.FALSE.

```


SUFAIL=.FALSE.

I=0 ; J=0 ; NHARD=0 ; IITER=0 ; K=0 ; NBACK=0

EPBARN=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0 ; SIGMAT=R0 ; SIGMAS=R0 ; GMODU=R0
; BULK=R0
R2G=R0 ; R3G=R0 ; EEV=R0 ; P=R0 ; EEVD3=R0 ; EET=R0
; VARJ2T=R0
QTRIAL=R0 ; DETS=R0 ; SIGMAY=R0 ; XI=R0 ; PHI=R0 ; EPBAR=R0
; STRIAL=R0
HSLOPE=R0 ; NORMS=R0 ; SEQ=R0 ; PROSINVT=R0 ; BETA=R0 ; ALPHA=R0
; EQ1=R0
EQ2=R0 ; SDOTS=R0 ; ADBETA=R0 ; BDBETA=R0 ; CDBETA=R0 ;
DDBETA=R0 ; DXI=R0
SITDSIT=R0 ; PROSITDSIT=R0 ; SITDS=R0 ; PROSITDS=R0 ; DSITDS=R0 ;
PRODSITDS=R0 ; SDSINVT=R0
DBETA=R0 ; DALPHA=R0 ; MATRIX=R0 ; DXIDBETA=R0 ; HKSLOPE=R0 ; BKIN=R0
; EQ3=R0
BACKNI=R0 ; BACKI=R0 ; BACK=R0 ; BACKN=R0 ; ETA=R0 ; ETAN=R0
; EQ4=R0
DALPHAB=R0

! INITILIZE THE FOURTH ORER IDENTITY TENSOR

FOID=R0
FOID(1,1)=R1
FOID(2,2)=R1
FOID(3,3)=R1
FOID(4,4)=R1
FOID(5,5)=R1
FOID(6,6)=R1

! INITILIZE THE SECON ORDER IDENTITY TENSOR

SOID=R0
SOID(1)=R1
SOID(2)=R1
SOID(3)=R1

! COMPUTE (FOID-(SOID \OTIMES SOID)/3)

DFOID=R0

DO I=1,NSTRE

DO J=1,NSTRE

DFOID(I,J)=FOID(I,J)-(R1/R3)*SOID(I)*SOID(J)

ENDDO

ENDDO

```

DFOID(4,4)=DFOID(4,4)*R2
DFOID(5,5)=DFOID(5,5)*R2
DFOID(6,6)=DFOID(6,6)*R2

! *****
! VARIÁVEIS NECESSÁRIAS PARA A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE
! ENCRUAMENTO
! *****
SIGMA=R0 ; DC_DALPHA_SIGMA=R0 ; DC_ALPHA_SIGMA=R0
!=====
====
!=====
====
! STATE UPDATE
DGAMA=R0
STRES=R0
EPBARN=IRSTAVA(KSTRE+1)
!
BACKNI(1,1)=IRSTAVA(KSTRE+1+1)
BACKNI(1,2)=IRSTAVA(KSTRE+1+2)
BACKNI(1,3)=IRSTAVA(KSTRE+1+3)
BACKNI(1,4)=IRSTAVA(KSTRE+1+4)
BACKNI(1,5)=IRSTAVA(KSTRE+1+5)
BACKNI(1,6)=IRSTAVA(KSTRE+1+6)
!
BACKNI(2,1)=IRSTAVA(KSTRE+1+7)
BACKNI(2,2)=IRSTAVA(KSTRE+1+8)
BACKNI(2,3)=IRSTAVA(KSTRE+1+9)
BACKNI(2,4)=IRSTAVA(KSTRE+1+10)
BACKNI(2,5)=IRSTAVA(KSTRE+1+11)
BACKNI(2,6)=IRSTAVA(KSTRE+1+12)
!
BACKNI(3,1)=IRSTAVA(KSTRE+1+13)
BACKNI(3,2)=IRSTAVA(KSTRE+1+14)
BACKNI(3,3)=IRSTAVA(KSTRE+1+15)
BACKNI(3,4)=IRSTAVA(KSTRE+1+16)
BACKNI(3,5)=IRSTAVA(KSTRE+1+17)
BACKNI(3,6)=IRSTAVA(KSTRE+1+18)
!
! SET SOME MATERIAL PROPERTIES
YOUNG=RPROPS(2)
POISS=RPROPS(3)
NHARD=IPROPS(3)

```

```

!
NBACK=IPROPS (4)
!
SIGMAY=RPROPS (4)
!
HKSLOPE (1)=RPROPS (5)
BKIN (1)=RPROPS (6)
!
HKSLOPE (2)=RPROPS (7)
BKIN (2)=RPROPS (8)
!
HKSLOPE (3)=RPROPS (9)
BKIN (3)=RPROPS (10)
!
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
GMODU=YOUNG/ (R2* (R1+POISS) )
BULK=YOUNG/ (R3* (R1-R2*POISS) )
R2G=R2*GMODU
R3G=R3*GMODU
! COMPUTE THE ELASTIC TRIAL STATE
EEV=STRAN (1)+STRAN (2)+STRAN (3)
P=BULK*EEV
! ELASTIC TRIAL DEVIATORIC STRAIN
EEVD3=EEV/R3
EET (1)=STRAN (1)-EEVD3
EET (2)=STRAN (2)-EEVD3
EET (3)=STRAN (3)-EEVD3
EET (4)=STRAN (4)/R2
EET (5)=STRAN (5)/R2
EET (6)=STRAN (6)/R2
!
BACKN=R0
DO I=1, NBACK
    DO J=1, NSTRE
        BACKN (J)=BACKN (J)+BACKNI (I,J)
    ENDDO
ENDDO
!
ETAN (1)=R2G*EET (1)-BACKN (1)
ETAN (2)=R2G*EET (2)-BACKN (2)
ETAN (3)=R2G*EET (3)-BACKN (3)
ETAN (4)=R2G*EET (4)-BACKN (4)
ETAN (5)=R2G*EET (5)-BACKN (5)

```

```

ETAN(6)=R2G*EET(6)-BACKN(6)
! COMPUTE TRIAL EFFECTIVE STRESS
VARJ2T=ETAN(1)*ETAN(1)+ETAN(2)*ETAN(2)+ETAN(3)*ETAN(3)+&
      R2*ETAN(4)*ETAN(4)+R2*ETAN(5)*ETAN(5)+R2*ETAN(6)*ETAN(6)
QTRIAL=DSQRT(R3*VARJ2T/R2)
! CHECK FOR PLASTIC ADMISSIBILITY
PHI=QTRIAL-SIGMAY
IF (PHI/SIGMAY.GT.TOL) THEN
  ! PLASTIC DOMAIN
  IFPLAS=.TRUE.
  ! INITIALIZE VARIABLES FOR NEWTON-RAPHSON METHOD
  EPBAR=EPBARN
  STRIAL=R2G*EET
  STRES=STRIAL
  BACK=BACKN
  BACKI=BACKNI
  ETA=ETAN
  DO IITER=1,50
    ! NORMS -> ||S||
    NORMS=DSQRT(ETA(1)*ETA(1)+ETA(2)*ETA(2)+&
      ETA(3)*ETA(3)+R2*ETA(4)*ETA(4)+&
      R2*ETA(5)*ETA(5)+R2*ETA(6)*ETA(6))
    ! SEQ -- > SIGMA_EQ
    SEQ=DSQRT(R3/R2)*NORMS
    ! COMPUTE ALPHA
    DO I=1,NSTRE
      ALPHA(I)=DSQRT(R3/R2)*ETA(I)/NORMS
    ENDDO
    !
    ! INITILIZE THE RESIDUAL EQUATION --> EQi
    DO I=1, NSTRE
      EQ1(I)=STRES(I)-STRIAL(I)+R2G*DGAMA*ALPHA(I)
    ENDDO
    !
    EQ2=EPBAR-EPBARN-DGAMA
    !
    EQ3=SEQ-SIGMAY
    DO I=1, NSTRE
      EQ4(0+I)=BACKI(1,I)-BACKNI(1,I)-
(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*ALPHA(I)+DGAMA*BKIN(1)*BACKI(1,I) !BETA 1
      EQ4(6+I)=BACKI(2,I)-BACKNI(2,I)-
(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*ALPHA(I)+DGAMA*BKIN(2)*BACKI(2,I) !BETA 2

```

```

      EQ4 (12+I)=BACKI (3,I) -BACKNI (3,I) -
(R2/R3) *HKSLOPE (3) *DGAMA*ALPHA (I) +DGAMA*BKIN (3) *BACKI (3,I)  !BETA 3
      ENDDO

      ! =====
=====

      ! =====
=====

      ! CONSTRUCT THE MATRIX WITH THE DERIVATIVES

      ! =====
=====

      ! =====
=====

      ! *****
      ! COMPUTE S \OTIMES S
      ! *****
      SDOTS=R0
      DO I=1,NSTRE
        DO J=1,NSTRE
          IF (J.GE.4) THEN
            SDOTS (I,J)=R2*ETA (I) *ETA (J)
          ELSE
            SDOTS (I,J)=ETA (I) *ETA (J)
          ENDIF
        ENDDO
      ENDDO

      ! =====
      ! COMPUTE DALPHA
      ! =====

      DALPHA=R0
      DALPHAB=R0
      DO I=1,NSTRE
        DO J=1,NSTRE
          DALPHA (I,J)=DSQRT (R3/R2) *FOID (I,J) /NORMS-&
            DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I,J) / (NORMS**R3)

          DALPHAB (I,J)=-DSQRT (R3/2) *FOID (I,J) /NORMS+&
            DSQRT (R3/R2) *SDOTS (I,J) / (NORMS**R3)
        ENDDO
      ENDDO

```

```

ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À PRIMEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX=R0
DO I=1,NSTRE
    DO J=1,NSTRE
        MATRIX(I,J)=FOID(I,J)+R2G*DGAMA*DALPHA(I,J)
    ENDDO
ENDDO

!
MATRIX(1,7)=R0
MATRIX(2,7)=R0
MATRIX(3,7)=R0
MATRIX(4,7)=R0
MATRIX(5,7)=R0
MATRIX(6,7)=R0
!
MATRIX(1,8)=R2G*ALPHA(1)
MATRIX(2,8)=R2G*ALPHA(2)
MATRIX(3,8)=R2G*ALPHA(3)
MATRIX(4,8)=R2G*ALPHA(4)
MATRIX(5,8)=R2G*ALPHA(5)
MATRIX(6,8)=R2G*ALPHA(6)

DO I=1,NSTRE
    DO J=1,NSTRE
        MATRIX(I,J+8)=R2G*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 1
        MATRIX(I,J+14)=R2G*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 2
        MATRIX(I,J+20)=R2G*DGAMA*DALPHAB(I,J) !BETA 3
    ENDDO
ENDDO

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À SEGUNDA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX(7,1)=R0
MATRIX(7,2)=R0
MATRIX(7,3)=R0
MATRIX(7,4)=R0
MATRIX(7,5)=R0
MATRIX(7,6)=R0
!

```

```

MATRIX (7,7)=R1
!
MATRIX (7,8)=-R1
!BETA 1
MATRIX (7,9)=R0
MATRIX (7,10)=R0
MATRIX (7,11)=R0
MATRIX (7,12)=R0
MATRIX (7,13)=R0
MATRIX (7,14)=R0
!BETA 2
MATRIX (7,15)=R0
MATRIX (7,16)=R0
MATRIX (7,17)=R0
MATRIX (7,18)=R0
MATRIX (7,19)=R0
MATRIX (7,20)=R0
!BETA 3
MATRIX (7,21)=R0
MATRIX (7,22)=R0
MATRIX (7,23)=R0
MATRIX (7,24)=R0
MATRIX (7,25)=R0
MATRIX (7,26)=R0

! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À TERCEIRA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====

MATRIX (8,1)=DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8,2)=DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS
MATRIX (8,3)=DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8,4)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8,5)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8,6)=R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)
!
MATRIX (8,7)=R0
MATRIX (8,8)=R0
!BETA 1
MATRIX (8,9)=-DSQRT (R3/R2) *ETA (1) /NORMS
MATRIX (8,10)=-DSQRT (R3/R2) *ETA (2) /NORMS
MATRIX (8,11)=-DSQRT (R3/R2) *ETA (3) /NORMS
MATRIX (8,12)=-R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (4) /NORMS)
MATRIX (8,13)=-R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (5) /NORMS)
MATRIX (8,14)=-R2* (DSQRT (R3/R2) *ETA (6) /NORMS)

```

```

!BETA 2
MATRIX(8,15)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,16)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,17)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,18)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,19)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,20)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!BETA 3
MATRIX(8,21)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(1)/NORMS
MATRIX(8,22)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(2)/NORMS
MATRIX(8,23)=-DSQRT(R3/R2)*ETA(3)/NORMS
MATRIX(8,24)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(4)/NORMS)
MATRIX(8,25)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(5)/NORMS)
MATRIX(8,26)=-R2*(DSQRT(R3/R2)*ETA(6)/NORMS)
!
! =====
! DERIVADAS ASSOCIADAS À QUARTA EQUAÇÃO DE RESÍDUO
! =====
DO I=1,NSTRE
    DO J=1,NSTRE
        MATRIX(I+8,J)=-(R2/R3)*HKSLOPE(1)*DGAMA*DALPHA(I,J)
!BETA 1
        MATRIX(I+14,J)=-(R2/R3)*HKSLOPE(2)*DGAMA*DALPHA(I,J) !BETA 2
        MATRIX(I+20,J)=-(R2/R3)*HKSLOPE(3)*DGAMA*DALPHA(I,J) !BETA 3
    ENDDO
ENDDO
! BETA 1
MATRIX(9,7)=R0
MATRIX(10,7)=R0
MATRIX(11,7)=R0
MATRIX(12,7)=R0
MATRIX(13,7)=R0
MATRIX(14,7)=R0
! BETA 2
MATRIX(15,7)=R0
MATRIX(16,7)=R0
MATRIX(17,7)=R0
MATRIX(18,7)=R0
MATRIX(19,7)=R0
MATRIX(20,7)=R0
! BETA 3

```



```

MATRIX (21, 7) =R0
MATRIX (22, 7) =R0
MATRIX (23, 7) =R0
MATRIX (24, 7) =R0
MATRIX (25, 7) =R0
MATRIX (26, 7) =R0
!
DO I=1, NSTRE
    MATRIX (I+8, 8) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (1) *ALPHA (I) +BKIN (1) *BACKI (1, I)  !BETA 1
    MATRIX (I+14, 8) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (2) *ALPHA (I) +BKIN (2) *BACKI (2, I)  !BETA 2
    MATRIX (I+20, 8) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (3) *ALPHA (I) +BKIN (3) *BACKI (3, I)  !BETA 3
ENDDO
!
DO I=1, NSTRE
    DO J=1, NSTRE
        MATRIX (I+8, J+8) =FOID (I, J) -
(R2/R3) *HKSLOPE (1) *DGAMA *DALPHAB (I, J) +DGAMA *BKIN (1) *FOID (I, J)  !BETA 1
        MATRIX (I+8, J+14) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (1) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 1
        MATRIX (I+8, J+20) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (1) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 1
        MATRIX (I+14, J+8) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (2) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 2
        MATRIX (I+14, J+14) =FOID (I, J) -
(R2/R3) *HKSLOPE (2) *DGAMA *DALPHAB (I, J) +DGAMA *BKIN (2) *FOID (I, J)  !BETA 2
        MATRIX (I+14, J+20) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (2) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 2
        MATRIX (I+20, J+8) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (3) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 3
        MATRIX (I+20, J+14) =-
(R2/R3) *HKSLOPE (3) *DGAMA *DALPHAB (I, J)  !BETA 3
        MATRIX (I+20, J+20) =FOID (I, J) -
(R2/R3) *HKSLOPE (3) *DGAMA *DALPHAB (I, J) +DGAMA *BKIN (3) *FOID (I, J)  !BETA 3
    ENDDO
ENDDO

! =====
==

! SOLVE THE EQUATION SYSTEM

```

```

==
!=====
!
IF (NBACK.EQ.1) THEN
    MATRIX14=R0
    DO I=1,14
        DO J=1,14
            MATRIX14 (I,J)=MATRIX (I,J)
        ENDDO
    ENDDO
    !
    RHS14=R0
    DO I=1,NSTRE
        RHS14 (I)=-EQ1 (I)
    ENDDO
    RHS14 (7)=-EQ2
    RHS14 (8)=-EQ3
    DO I=1,NSTRE
        RHS14 (8+I)=-EQ4 (I)
    ENDDO
    !
    RES14=R0
    CALL SOLVERMA (MATRIX14,RHS14,RES14,14)
    !
    RES=R0
    DO I=1,14
        RES (I)=RES14 (I)
    ENDDO
ENDIF
IF (NBACK.EQ.2) THEN
    MATRIX20=R0
    DO I=1,20
        DO J=1,20
            MATRIX20 (I,J)=MATRIX (I,J)
        ENDDO
    ENDDO
    !
    RHS20=R0
    DO I=1,NSTRE
        RHS20 (I)=-EQ1 (I)
    ENDDO
    RHS20 (7)=-EQ2

```

```

      RHS20 (8)=-EQ3
      DO I=1,12
        RHS20 (8+I)=-EQ4 (I)
      ENDDO
      !
      RES20=R0
      CALL SOLVERMA (MATRIX20,RHS20,RES20,20)
      !
      RES=R0
      DO I=1,20
        RES (I) =RES20 (I)
      ENDDO
    ENDIF
  !
  IF (NBACK.EQ.3) THEN
    RHS=R0
    DO I=1,NSTRE
      RHS (I)=-EQ1 (I)
    ENDDO
    RHS (7)=-EQ2
    RHS (8)=-EQ3
    !
    DO I=1,18
      RHS (8+I)=-EQ4 (I)
    ENDDO
    RES=R0
    CALL SOLVERMA (MATRIX,RHS,RES,26)
  ENDIF
  ! UPDATE VARIABLES
  STRES (1)=STRES (1)+RES (1)
  STRES (2)=STRES (2)+RES (2)
  STRES (3)=STRES (3)+RES (3)
  STRES (4)=STRES (4)+RES (4)
  STRES (5)=STRES (5)+RES (5)
  STRES (6)=STRES (6)+RES (6)
  EPBAR=EPBAR+RES (7)
  DGAMA=DGAMA+RES (8)
  BACKI (1,1)=BACKI (1,1)+RES (9)
  BACKI (1,2)=BACKI (1,2)+RES (10)
  BACKI (1,3)=BACKI (1,3)+RES (11)
  BACKI (1,4)=BACKI (1,4)+RES (12)
  BACKI (1,5)=BACKI (1,5)+RES (13)
  BACKI (1,6)=BACKI (1,6)+RES (14)

```

```

IF (NBACK.EQ.2) THEN
    BACKI (2,1)=BACKI (2,1)+RES (15)
    BACKI (2,2)=BACKI (2,2)+RES (16)
    BACKI (2,3)=BACKI (2,3)+RES (17)
    BACKI (2,4)=BACKI (2,4)+RES (18)
    BACKI (2,5)=BACKI (2,5)+RES (19)
    BACKI (2,6)=BACKI (2,6)+RES (20)

```

```
ENDIF
```

```

IF (NBACK.EQ.3) THEN
    BACKI (2,1)=BACKI (2,1)+RES (15)
    BACKI (2,2)=BACKI (2,2)+RES (16)
    BACKI (2,3)=BACKI (2,3)+RES (17)
    BACKI (2,4)=BACKI (2,4)+RES (18)
    BACKI (2,5)=BACKI (2,5)+RES (19)
    BACKI (2,6)=BACKI (2,6)+RES (20)
    BACKI (3,1)=BACKI (3,1)+RES (21)
    BACKI (3,2)=BACKI (3,2)+RES (22)
    BACKI (3,3)=BACKI (3,3)+RES (23)
    BACKI (3,4)=BACKI (3,4)+RES (24)
    BACKI (3,5)=BACKI (3,5)+RES (25)
    BACKI (3,6)=BACKI (3,6)+RES (26)

```

```
ENDIF
```

```
!=====
```

```
==
```

```
! CHECK CONVERGENCE
```

```
!=====
```

```
==
```

```
RESNOR=R0
```

```
IF (DABS (STRES (1)) .LE. TOL) THEN
```

```
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1))
```

```
ELSE
```

```
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (1) / STRES (1))
```

```
ENDIF
```

```
IF (DABS (STRES (2)) .LE. TOL) THEN
```

```
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2))
```

```
ELSE
```

```
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (2) / STRES (2))
```

```
ENDIF
```

```
IF (DABS (STRES (3)) .LE. TOL) THEN
```

```
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3))
```

```
ELSE
```

```

RESNOR=RESNOR+DABS (RES (3) /STRES (3) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (4) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (4) /STRES (4) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (5) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (5) /STRES (5) )
ENDIF
IF (DABS (STRES (6) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (6) /STRES (6) )
ENDIF
IF (EPBAR.LT.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (7) /EPBAR)
ENDIF
IF (DGAMA.LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (8) /DGAMA)
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1,1) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (9) /BACKI (1,1) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1,2) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (10) /BACKI (1,2) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1,3) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (11) /BACKI (1,3) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1,4) ) .LE.TOL) THEN

```

```

RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (12) /BACKI (1, 4) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 5) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (13) /BACKI (1, 5) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (1, 6) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (14) /BACKI (1, 6) )
ENDIF
!
IF (NBACK.EQ.1) THEN
BACK (1) =BACKI (1, 1)
BACK (2) =BACKI (1, 2)
BACK (3) =BACKI (1, 3)
BACK (4) =BACKI (1, 4)
BACK (5) =BACKI (1, 5)
BACK (6) =BACKI (1, 6)
ELSEIF (NBACK.EQ.2) THEN
IF (DABS (BACKI (2, 1) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) /BACKI (2, 1) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 2) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) /BACKI (2, 2) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 3) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) /BACKI (2, 3) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 4) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) /BACKI (2, 4) )
ENDIF

```

```

IF (DABS (BACKI (2, 5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19) /BACKI (2, 5))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 6)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20) /BACKI (2, 6))
ENDIF
BACK (1) =BACKI (1, 1) +BACKI (2, 1)
BACK (2) =BACKI (1, 2) +BACKI (2, 2)
BACK (3) =BACKI (1, 3) +BACKI (2, 3)
BACK (4) =BACKI (1, 4) +BACKI (2, 4)
BACK (5) =BACKI (1, 5) +BACKI (2, 5)
BACK (6) =BACKI (1, 6) +BACKI (2, 6)
ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
IF (DABS (BACKI (2, 1)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (15) /BACKI (2, 1))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 2)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (16) /BACKI (2, 2))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 3)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (17) /BACKI (2, 3))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 4)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (18) /BACKI (2, 4))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 5)) .LE. TOL) THEN
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19))
ELSE
    RESNOR=RESNOR+DABS (RES (19) /BACKI (2, 5))
ENDIF
IF (DABS (BACKI (2, 6)) .LE. TOL) THEN

```

```

RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (20) /BACKI (2,6) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,1) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (21) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (21) /BACKI (3,1) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,2) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (22) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (22) /BACKI (3,2) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,3) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (23) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (23) /BACKI (3,3) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,4) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (24) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (24) /BACKI (3,4) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,5) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (25) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (25) /BACKI (3,5) )
ENDIF
IF (DABS (BACKI (3,6) ) .LE.TOL) THEN
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (26) )
ELSE
RESNOR=RESNOR+DABS (RES (26) /BACKI (3,6) )
ENDIF
BACK (1) =BACKI (1,1) +BACKI (2,1) +BACKI (3,1)
BACK (2) =BACKI (1,2) +BACKI (2,2) +BACKI (3,2)
BACK (3) =BACKI (1,3) +BACKI (2,3) +BACKI (3,3)
BACK (4) =BACKI (1,4) +BACKI (2,4) +BACKI (3,4)
BACK (5) =BACKI (1,5) +BACKI (2,5) +BACKI (3,5)
BACK (6) =BACKI (1,6) +BACKI (2,6) +BACKI (3,6)
ENDIF
!
ETA (1) =STRES (1) -BACK (1)

```



```

ETA (2) = STRES (2) - BACK (2)
ETA (3) = STRES (3) - BACK (3)
ETA (4) = STRES (4) - BACK (4)
ETA (5) = STRES (5) - BACK (5)
ETA (6) = STRES (6) - BACK (6)
!
IF (RESNOR.LE.TOL) THEN
    RSTAVA (KSTRE+1) = EPBAR
    RSTAVA (1) = (STRES (1) / R2G) + (R1 / R3) * P / BULK
    RSTAVA (2) = (STRES (2) / R2G) + (R1 / R3) * P / BULK
    RSTAVA (3) = (STRES (3) / R2G) + (R1 / R3) * P / BULK
    RSTAVA (4) = (STRES (4) / R2G) * R2
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    RSTAVA (5) = (STRES (5) / R2G) * R2
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    RSTAVA (6) = (STRES (6) / R2G) * R2
    !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! ATENÇÃO!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
    !
    RSTAVA (7) = EPBAR
    !
    RSTAVA (8) = BACKI (1, 1)
    RSTAVA (9) = BACKI (1, 2)
    RSTAVA (10) = BACKI (1, 3)
    RSTAVA (11) = BACKI (1, 4)
    RSTAVA (12) = BACKI (1, 5)
    RSTAVA (13) = BACKI (1, 6)
    IF (NBACK.EQ.2) THEN
        RSTAVA (14) = BACKI (2, 1)
        RSTAVA (15) = BACKI (2, 2)
        RSTAVA (16) = BACKI (2, 3)
        RSTAVA (17) = BACKI (2, 4)
        RSTAVA (18) = BACKI (2, 5)
        RSTAVA (19) = BACKI (2, 6)
    ELSEIF (NBACK.EQ.3) THEN
        RSTAVA (14) = BACKI (2, 1)
        RSTAVA (15) = BACKI (2, 2)
        RSTAVA (16) = BACKI (2, 3)
        RSTAVA (17) = BACKI (2, 4)
        RSTAVA (18) = BACKI (2, 5)
        RSTAVA (19) = BACKI (2, 6)
        RSTAVA (20) = BACKI (3, 1)
        RSTAVA (21) = BACKI (3, 2)
        RSTAVA (22) = BACKI (3, 3)

```

```

        RSTAVA(23)=BACKI(3,4)
        RSTAVA(24)=BACKI(3,5)
        RSTAVA(25)=BACKI(3,6)
ENDIF
!
STRES(1)=STRES(1)+P
STRES(2)=STRES(2)+P
STRES(3)=STRES(3)+P
STRES(4)=STRES(4)
STRES(5)=STRES(5)
STRES(6)=STRES(6)
!
        GOTO 1000
ENDIF
ENDDO
ELSE
! ELASTIC DOMAIN
        STRES(1)=R2G*EET(1)+P
        STRES(2)=R2G*EET(2)+P
        STRES(3)=R2G*EET(3)+P
        STRES(4)=R2G*EET(4)
        STRES(5)=R2G*EET(5)
        STRES(6)=R2G*EET(6)

        RSTAVA(1)=STRAN(1)
        RSTAVA(2)=STRAN(2)
        RSTAVA(3)=STRAN(3)
        RSTAVA(4)=STRAN(4)
        RSTAVA(5)=STRAN(5)
        RSTAVA(6)=STRAN(6)
ENDIF
1000 CONTINUE
LALGVA(1)=IFPLAS
LALGVA(2)=SUFAIL
RETURN
END

```